Ecuaciones Cuadráticas y Funciones Cuadráticas

Say Thanks to the Authors
Click http://www.ck12.org/saythanks
(No sign in required)

CK-12 flexbook
next generation textbooks

To access a customizable version of this book, as well as other interactive content, visit www.ck12.org

CK-12 Foundation is a non-profit organization with a mission to reduce the cost of textbook materials for the K-12 market both in the U.S. and worldwide. Using an open-content, web-based collaborative model termed the **FlexBook®**, CK-12 intends to pioneer the generation and distribution of high-quality educational content that will serve both as core text as well as provide an adaptive environment for learning, powered through the **FlexBook Platform®**.

Copyright © 2012 CK-12 Foundation, www.ck12.org

The names "CK-12" and "CK12" and associated logos and the terms "**FlexBook®**" and "**FlexBook Platform®**" (collectively "CK-12 Marks") are trademarks and service marks of CK-12 Foundation and are protected by federal, state, and international laws.

Any form of reproduction of this book in any format or medium, in whole or in sections must include the referral attribution link **http://www.ck12.org/saythanks** (placed in a visible location) in addition to the following terms.

Except as otherwise noted, all CK-12 Content (including CK-12 Curriculum Material) is made available to Users in accordance with the Creative Commons Attribution/Non-Commercial/Share Alike 3.0 Unported (CC BY-NC-SA) License (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/), as amended and updated by Creative Commons from time to time (the "CC License"), which is incorporated herein by this reference.

Complete terms can be found at http://www.ck12.org/terms.

Printed: July 23, 2012

flexbook
next generation textbooks

CHAPTER 1

Ecuaciones Cuadráticas y Funciones Cuadráticas

CHAPTER OUTLINE

1.1 Gráficas de funciones cuadráticas
1.2 Método gráfico para resolver funciones cuadráticas
1.3 Ecuaciones cuadráticas a través de raíces cuadradas
1.4 Solución de ecuaciones cuadráticas por completación de cuadrados
1.5 Solución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática
1.6 El discriminante
1.7 Modelos lineales, exponenciales y cuadráticos
1.8 Estrategias para resolver problemas: escoger un modelo de función

1.1 Gráficas de funciones cuadráticas

Objetivos de aprendizaje

- Graficar funciones cuadráticas.
- Comparar gráficas de funciones cuadráticas.
- Graficar funciones cuadráticas en la forma intersecto.
- Analizar gráficas de funciones cuadráticas del mundo real.

Introducción

Las gráficas de las funciones cuadráticas son líneas curvas llamadas **parábolas**. No es difícil encontrar formas parabólicas alrededor. Aquí hay algunos ejemplos:

- La trayectoria que una pelota o un cohete muestra en el aire.
- El agua que sale de una fuente para beber.
- La forma de una antena satelital.
- La forma de los vidrios de las luces de un carro o de una lámpara.

Gráficas de funciones cuadráticas

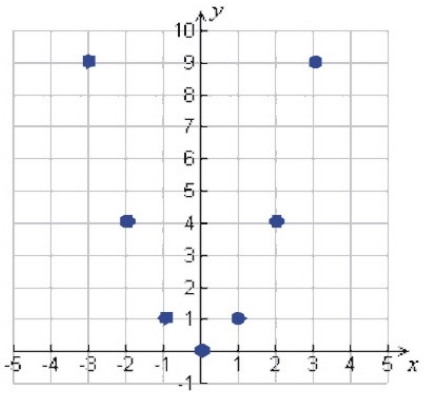
Observemos cómo luce una parábola graficando la función cuadrática más simple: $y = x^2$.

Graficaremos esta función construyendo una tabla de valores. Ya que la gráfica será una curva, necesitamos estar seguros que tenemos suficientes puntos para obtener una gráfica bastante precisa.

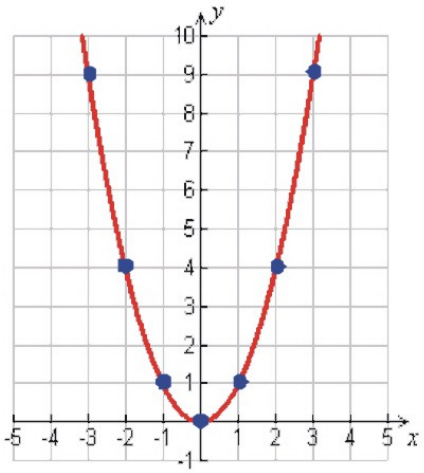
TABLE 1.1:

x	$y = x^2$
-3	$(-3)^2 = 9$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$(0)^2 = 0$
1	$(1)^2 = 1$
2	$(2)^2 = 4$
3	$(3)^2 = 9$

Graficamos estos puntos en un plano coordenado.



Para dibujar la parábola, trazar una curva suave a través de todos los puntos (No conectar los puntos con líneas rectas).



Grafiquemos algunos ejemplos más.

Ejemplo 1

Graficar las siguientes parábolas.

a) $y = 2x^2$

b) $y = -x^2$

c) $y = x^2 - 2x + 3$

Solución

a) $y = 2x^2 + 4x + 1$

Hacer una tabla de valores.

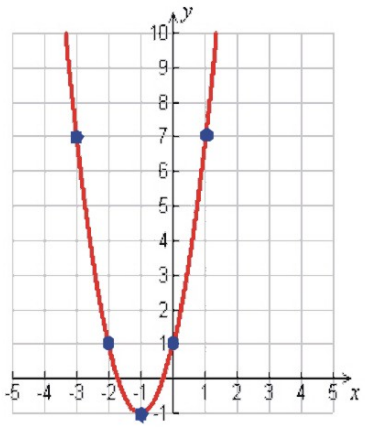
TABLE 1.2:

x	$y = 2x^2 + 4x + 1$
-3	$2(-3)^2 + 4(-3) + 1 = 7$
-2	$2(-2)^2 + 4(-2) + 1 = 1$
-1	$2(-1)^2 + 4(-1) + 1 = -1$

TABLE 1.2: (continued)

x	$y = 2x^2 + 4x + 1$
0	$2(0)^2 + 4(0) + 1 = 1$
1	$2(1)^2 + 4(1) + 1 = 7$
2	$2(2)^2 + 4(2) + 1 = 17$
3	$2(3)^2 + 4(3) + 1 = 31$

Nota que los últimos dos puntos tienen valores grandes en $y-$. No los graficaremos ya que estos harían demasiado grande la escala en $y-$. Ahora grafiquemos los puntos restantes y conectémoslos con una curva suave.



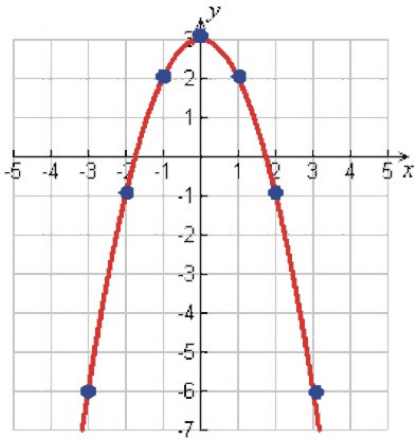
b) $y = -x^2 + 3$

Hacer una tabla de valores.

TABLE 1.3:

x	$y = -x^2 + 3$
-3	$-(-3)^2 + 3 = -6$
-2	$-(-2)^2 + 3 = -1$
-1	$-(-1)^2 + 3 = 2$
0	$-(0)^2 + 3 = 3$
1	$-(1)^2 + 3 = 2$
2	$-(2)^2 + 3 = -1$
3	$-(3)^2 + 3 = -6$

Grafiquemos los puntos y conectémoslos con una curva suave.



Nótese que esta es una parábola "hacia abajo". Nuestra ecuación tiene un signo negativo enfrente del término x^2. El signo del coeficiente del término x^2 determina si la parábola es abierta hacia arriba o hacia abajo.

Si el coeficiente de x^2 es positivo, entonces la parábola se habre hacia arriba.

Si el coeficiente de x^2 es negativo, entonces la parábola se habre hacia abajo.

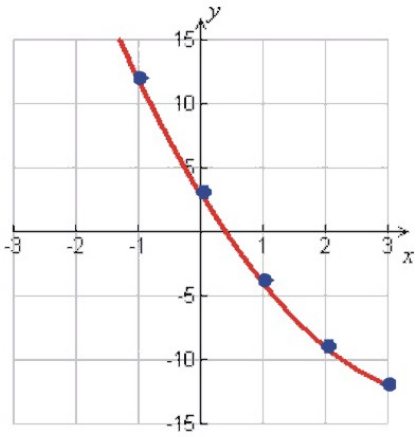
c) $y = x^2 - 8x + 3$

Hacer una tabla de valores.

TABLE 1.4:

x	$y = x^2 - 8x + 3$
-3	$(-3)^2 - 8(-3) + 3 = 36$
-2	$(-2)^2 - 8(-2) + 3 = 23$
-1	$(-1)^2 - 8(-1) + 3 = 12$
0	$(0)^2 - 8(0) + 3 = 3$
1	$(1)^2 - 8(1) + 3 = -4$
2	$(2)^2 - 8(2) + 3 = -9$
3	$(3)^2 - 8(3) + 3 = -12$

No graficaremos los primero dos puntos de la tabla ya que sus valores son muy grandes. Graficar el resto de puntos y conectarlos con una curva suave.

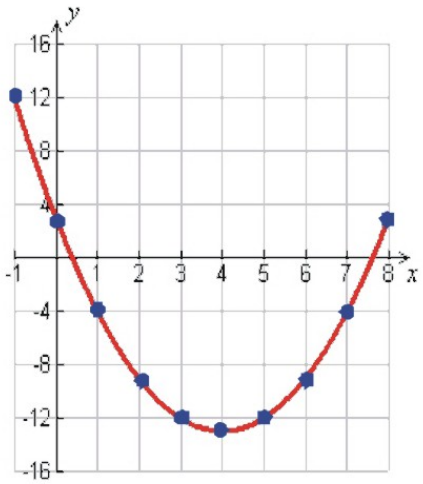


Esta no parece la gráfica de una parábola. ¿Qué está sucediendo aquí? Si no está clara la apariencia de la gráfica, se deben obtener más puntos hasta obtener una curva familiar. Para valores negativos de x, los valores de y se vuelven cada vez más grandes. Usemos más valores positivos de x después de $x = 3$.

TABLE 1.5:

x	$y = x^2 - 8x + 3$
-1	$(-1)^2 - 8(-1) + 3 = 12$
0	$(0)^2 - 8(0) + 3 = 3$
1	$(1)^2 - 8(1) + 3 = -4$
0	$(0)^2 - 8(0) + 3 = 3$
1	$(1)^2 - 8(1) + 3 = -4$
2	$(2)^2 - 8(2) + 3 = -9$
3	$(3)^2 - 8(3) + 3 = -12$
4	$(4)^2 - 8(4) + 3 = -13$
5	$(5)^2 - 8(5) + 3 = -12$
6	$(6)^2 - 8(6) + 3 = -9$
7	$(7)^2 - 8(7) + 3 = -4$
8	$(8)^2 - 8(8) + 3 = 3$

Graficar los puntos otra vez y unirlos con una curva suave.



Ahora podemos ver la forma parabólica con la que estamos familiarizados. Graficar construyendo una tabla de valores puede ser muy tedioso, especialmente en ejercicios como el de este ejemplo. En las siguientes secciones, aprenderemos algunas técnicas que simplificarán este procedimiento grandemente, pero primero necesitamos conocer más sobre las propiedades de las parábolas.

Comparación de gráficas de funciones cuadráticas

La **forma general** (o **forma estándar**) de una función cuadrática es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Aquí a, b y c son los **coeficientes.** Recuérdese que un coeficiente es solo un número (por ejemplo, un término constante) que va antes de una variable y él cual también puede aparecer solo. Debes saber que si tienes una función cuadrática, su gráfica es siempre una palabra. A pesar de que la gráfica de una función cuadrática siempre tiene la misma forma, existen diferentes situaciones donde la gráfica puede estar abierta hacia abajo. Esta estará desplazada a un lugar diferente o puede estar "dilatada" o "comprimida". Estas situaciones están determinadas por los valores de los coeficientes. Veamos cómo un cambio en los coeficientes modifica la orientación, localización y forma de la parábola.

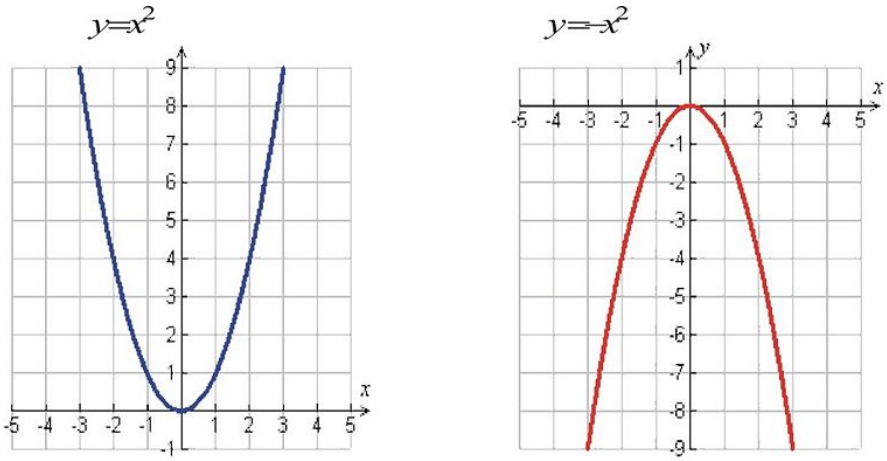
Orientación

¿Está la parábola abierta hacia arriba o hacia abajo?

La respuesta a esta pregunta es bien simple:

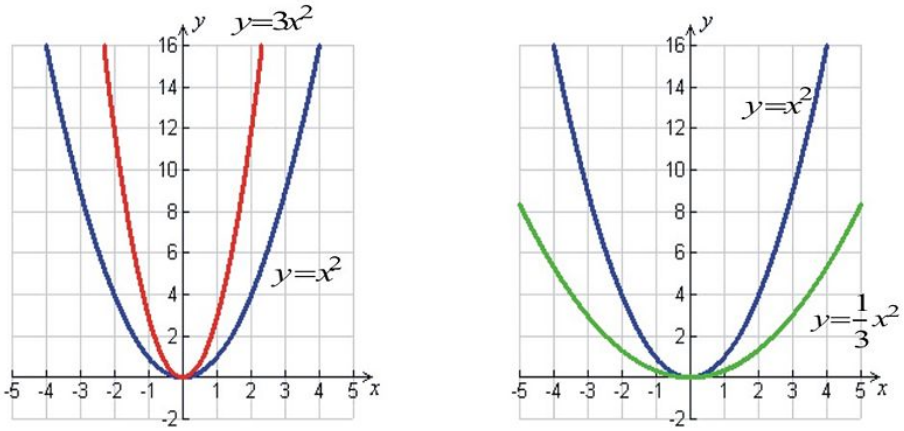
- Si a es positiva, la parábola se abre hacia arriba.
- Si a es negativa, la parábola se abre hacia abajo.

La siguiente figura muestra las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$. Puedes ver que la ambas gráficas tienen la forma de parábola, pero la gráfica de $y = x^2$ está abierta hacia arriba y la gráfica de $y = -x^2$ está abierta hacia abajo.



Dilatación

Un cambio en el valor del coeficiente a hace que la gráfica se "dilate" o "comprima". Observemos cómo comparamos las gráficas para diferentes valores positivos de a. La figura de la izquierda muestra las gráficas de $y = -x^2$ y $y = 3x^2$. La figura a la derecha muestra las gráficas de $y = -x^2$ y $y = \left(\frac{1}{3}\right)x^2$.



Nótese que mientras más grande es el valor de a, la gráfica se comprime más. Por ejemplo, en la primera figura, la gráfica de $y = 3x^2$ está más comprimida que la gráfica de $y = x^2$. También, mientras más pequeño sea el valor de a (por ejemplo cercano a 0), la gráfica se dilata más. Por ejemplo, en la segunda figura, la gráfica de $y = \left(\frac{1}{3}\right)x^2$ está más dilatada que la gráfica de $y = x^2$. Esto debe de verse de forma intuitiva, pero si piensas al respecto, esto tiene sentido. Observemos la tabla de valores de estas gráficas y veamos si podemos explicar por qué ocurre esto.

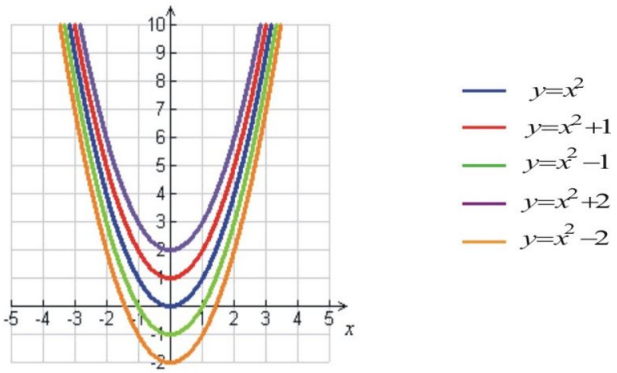
TABLE 1.6:

x	$y = x^2$	$y = 3x^2$	$y = \frac{1}{3}x^2$
-3	$(-3)^2 = 9$	$3(-3)^2 = 27$	$\frac{(-3)^2}{3} = 3$
-2	$(-2)^2 = 4$	$3(-2)^2 = 12$	$\frac{(-2)^2}{3} = \frac{4}{3}$
-1	$(-1)^2 = 1$	$3(-1)^2 = 3$	$\frac{(-1)^2}{3} = \frac{1}{3}$
0	$(0)^2 = 0$	$3(0)^2 = 0$	$\frac{(0)^2}{3} = 0$
1	$(1)^2 = 1$	$3(1)^2 = 3$	$\frac{(1)^2}{3} = \frac{1}{3}$
2	$(2)^2 = 4$	$3(2)^2 = 12$	$\frac{(2)^2}{3} = \frac{4}{3}$
3	$(3)^2 = 9$	$3(3)^2 = 27$	$\frac{(3)^2}{3} = 3$

De la tabla se puede observar que los valores de $y = 3x^2$ son más grandes que los valores de $y = x^2$. Esto ocurre porque cada valor de y se multiplica por 3. Como resultado, la parábola se comprimirá porque esta crece tres veces más rápido que $y = x^2$. Por el contrario, se puede observar que los valores de $y = \left(\frac{1}{3}\right)x^2$ son más pequeños que los valores de $y = x^2$. Esto ocurre porque cada valor de y se divide por 3. Como resultado, la parábola se dilatará porque esta crece a razón de un tercio de $y = x^2$.

Desplazamiento vertical

Cambios en el valor del coeficiente c (llamado el término constante) tienen el efecto de mover la parábola hacia arriba o hacia abajo. La siguiente figura muestra las gráficas de $y = x^2, y = x^2 + 1, y = x^2 - 1, y = x^2 + 2, y = x^2 - 2$.



Vemos que si c es positiva, la gráfica se desplaza hacia arriba c unidades. Si c negativa, la gráfica se desplaza hacia abajo c unidades. En una de las siguientes secciones también hablaremos sobre **desplazamiento horizontal (hacia la derecha o hacia la izquierda).** Antes de poder hacer esto necesitamos aprender cómo reescribir las ecuaciones cuadráticas en diferentes formas.

Graficar funciones cuadráticas en la forma intersecto

Como se observó, para poder obtener un buena gráfica de la parábola algunas veces es necesario usar bastantes puntos en la tabla de valores. Ahora hablaremos sobre diferentes propiedades de una parábola que harán que el

proceso de graficación sea menos tedioso. Observemos la gráfica de $y = x^2 - 6x + 8$.

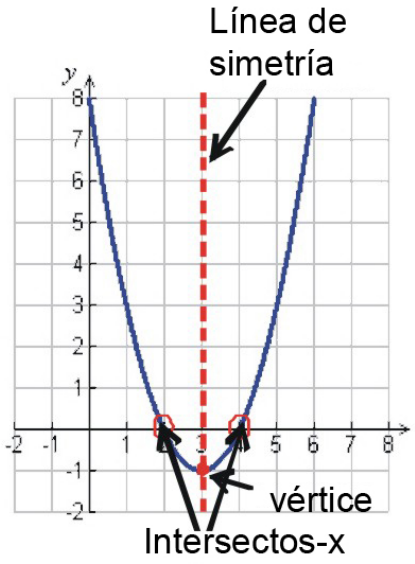
Hay algunas cosas que podemos notar:

1. La parábola intersecta el eje x en dos puntos: $x = 2$ y $x = 4$.

- Estos puntos son llamados los **intersectos** en $x-$ de la parábola.

2. El punto más bajo de la parábola es (3, -1).

- Este punto es llamado el **vértice** de la parábola.
- El vértice es el punto más bajo de la parábola abierta hacia arriba, y es el punto más alto de la parábola abierta hacia abajo.
- El vértice se encuentra exactamente entre los intersectos en $x-$. Este siempre será el caso y puedes encontrar el vértice usando esta regla.



3. Una parábola es **simétrica.** Si dibujas una línea vertical que pase por el vértice, puedes ver que las dos mitades de la parábola son imágenes una de la otra. La línea vertical es llamada la **línea de simetría.**

Decimos que la forma general de una función cuadrática es $y = ax^2 + bx + c$. Si podemos factorar la expresión cuadrática, podemos escribir la función en la **forma intersecto**.

$$y = a(x - m)(x - n)$$

Esta forma es muy útil porque nos facilita encontrar los intersectos en $x-$ y el vértice de la parábola. Los intersectos en $x-$ son los valores de x donde la gráfica cruza el eje de las $x-$. En otras palabras, sin los valores de x donde $y = 0$. Para encontrar los intersectos en $x-$ a partir de la función cuadrática, hacemos $y = 0$ y resolvemos.

$$0 = a(x - m)(x - n)$$

Ya que la ecuación se encuentra factorada, usamos la propiedad del producto cero para igualar cada factor a cero y resolver las ecuaciones lineales individualmente.

$$x-m=0 \qquad\qquad x-n=0$$

o

$$x=m \qquad\qquad x=n$$

Así, los intersectos en $x-$ son los puntos $(m,0)$ y $(n,0)$.

Una vez encontramos los intersectos en $x-$, es simple encontrar el vértice. La coordenada en $x-$ del vértice se encuentra en el centro de los dos intersectos en x, de tal forma que lo podemos encontrar tomando el promedio de los dos valores $\frac{(m+n)}{2}$.

El valor $y-$ puede encontrarse sustituyendo el valor de x en la ecuación de la función.

Hagamos algunos ejemplos para encontrar los intersectos en $x-$ y el vértice.

Ejemplo 2

Encontrar los intersectos en $x-$y el vértice de las siguientes funciones cuadráticas.

(a) $y=x^2-8x+15$

(b) $y=3x^2+6x-24$

Solución

a) $y=x^2-8x+15$

Escribir la función cuadrática en la forma intersecto factorando el lado derecho de la ecuación.

Recuerda que para factorar un trinomio necesitamos dos números cuyo producto sea 15 y cuya suma sea -8. Estos números son -5 y -3.

La función en la forma intersecto es $y=(x-5)(x-3)$

Encontramos los intersectos en $x-$ haciendo $y=0$.

Tenemos:

$$0=(x-5)(x-3)$$
$$x-5=0 \qquad\qquad x-3=0$$

o

$$x=5 \qquad\qquad x=3$$

Los intersectos en $x-$son (5, 0) **y** (3, 0).

El vértice está en el centro de los dos intersectos en $x-$. Encontramos el valor de x sacando el promedio de los dos intersectos en $x-$, $x=\frac{(5+3)}{2}=4$.

Encontramos el valor de y sustituyendo el valor de x que acabamos de encontrar en la ecuación original.

$$y=x^2-8x+15 \Rightarrow y=(4)^2-8(4)+15=16-32+15=-1$$

El vértice es (4, -1).

b) $y=3x^2+6x-24$

Reescribir la ecuación en la forma intersecto.

Factorar el término común 3 primero: $y = 3(x^2 + 2x - 8)$.

Luego factorar completamente: $y = 3(x+4)(x-2)$

Hacer $y = 0$ y resolver: $0 = 3(x+4)(x-2)$.

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

o

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Los intersectos en $x-$son: (-4, 0) **y** (2, 0)

Para el vértice,

$x = \frac{-4+2}{2} = -1$ y $y = 3(-1)^2 + 6(-1) - 24 = 3 - 6 - 24 = -27$

El vértice es: (-1, -27).

Cuando graficamos en muy útil conocer el vértice y los intersectos en $x-$. Conocer el vértice nos dice dónde se encuentra la mitad de la parábola. Cuando construimos una tabla de valores tomamos el vértice como un punto en la tabla. Entonces escogemos algunos valores pequeños y grandes de x. De esta manera, obtenemos una gráfica precisa de la función cuadrática sin la necesidad de tener muchos puntos en nuestra tabla.

Ejemplo 3

Encontrar los intersectos en $x-$ y el vértice. Usa estos puntos para crear una tabla de valores y graficar cada función.

a) $y = x^2 - 4$

b) $y = -x^2 + 14x - 48$

Solución

a) $y = x^2 - 4$

Encontremos los intersectos en $x-$ y el vértice.

Factorar el lado derecho de la función para escribir la ecuación en la forma intersecto.

$$y = (x-2)(x+2)$$

Hacer $y = 0$ y resolver.

$$0 = (x-2)(x+2)$$

$$x - 2 = 0 \qquad\qquad x + 2 = 0$$

o

$$x = 2 \qquad\qquad x = -2$$

Los intersectos en $x-$ son: (2, 0) y (-2, 0)

Encontrar el vértice.

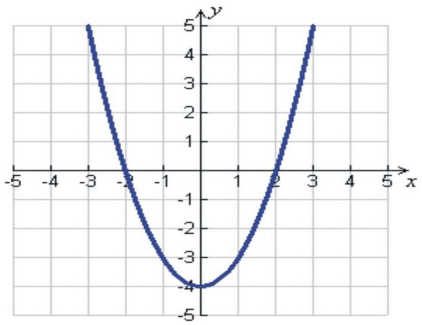
$$x = \frac{2-2}{2} = 0 \qquad y = (0)^2 - 4 = -4$$

El vértice es (0, -4)

Hacer una tabla de valores usando el vértice con el punto medio. Usar algunos valores pequeños y grandes de x a parte de $x = 0$. Incluir los intersectos en $x-$ en la tabla.

TABLE 1.7:

x	$y = x^2 - 4$
-3	$y = (-3)^2 - 4 = 5$
$x-$ intersecto -2	$y = (-2)^2 - 4 = 0$
-1	$y = (-1)^2 - 4 = -3$
vértice 0	$y = (0)^2 - 4 = -4$
1	$y = (1)^2 - 4 = -3$
$x-$ intersecto 2	$y = (2)^2 - 4 = 0$
3	$y = (3)^2 - 4 = 5$



b) $y = -x^2 + 14x - 48$

Encontremos los intersectos en $x-$ y el vértice.

Factorar el lado derecho de la función para escribir la ecuación en la forma intersecto.

$$y = -(x^2 - 14x + 48) = -(x-6)(x-8)$$

Hacer $y = 0$ y resolver.

$$0 = -(x-6)(x-8)$$

$$x - 6 = 0 \qquad x - 8 = 0$$

o

$$x = 6 \qquad x = 8$$

Los intersectos en $x-$ son: (6, 0) y (8, 0)

Encontrar el vértice.

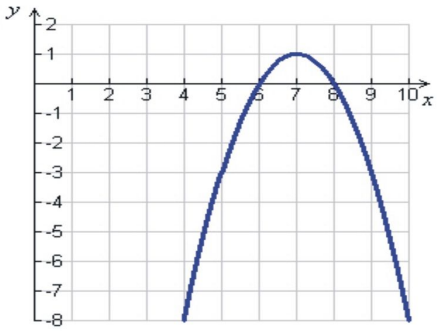
$$x = \frac{6+8}{2} = 7 \qquad y = (7)^2 + 14(7) - 48 = 1$$

El vértice es: (7, 1).

Construir una tabla de valores usando el vértice como punto medio. Usar algunos valores pequeños y grandes de x distintos que $x = 1$. Incluir los intersectos en $x-$ en la tabla. Luego, graficar la parábola.

TABLE 1.8:

x	$y = -x^2 + 14x - 48$
4	$y = -(4)^2 + 14(4) - 48 = -8$
5	$y = -(5)^2 + 14(5) - 48 = -3$
$x-$intercept 6	$y = -(6)^2 + 14(6) - 48 = 0$
vertex 7	$y = -(7)^2 + 14(7) - 48 = 1$
$x-$intercept 8	$y = -(8)^2 + 14(8) - 48 = 0$
9	$y = -(9)^2 + 14(9) - 48 = -3$
10	$y = -(10)^2 + 14(10) - 48 = -8$



Análisis de gráficas de funciones cuadráticas en el mundo real

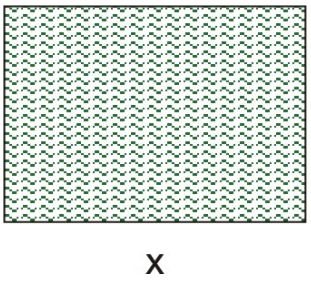
Como mencionamos al principio de esta sección, las curvas parabólicas son comunes en las aplicaciones del mundo real. Acá veremos algunas gráficas que representan ejemplos de aplicaciones de funciones cuadráticas en el mundo real.

Ejemplo 4 Área

Andrew tiene 100 pies de cerca para para encerrar una parcela rectangular de tomates. Él quiere encontrar las dimensiones del rectángulo que encierra la mayor área.

Solución

Podemos encontrar una ecuación para el área del rectángulo con un bosquejo de la situación.



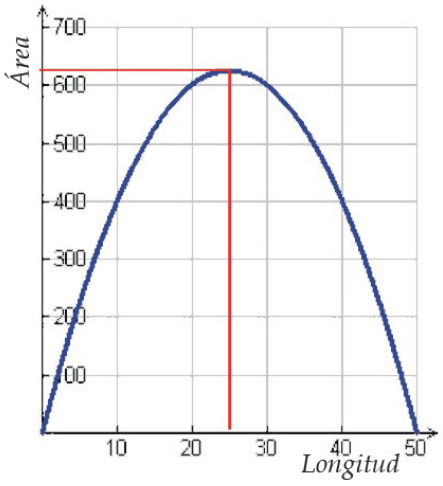
Sea x la longitud del rectángulo.

$50 - x$ el ancho del rectángulo (Recuerda que hay dos anchos, así que no es $100 - x$).

Sea y el área del rectángulo.

$$\tilde{A}\texttt{[U+0081]}\text{rea} = \text{longitud} \times \text{ancho} \Rightarrow y = x(50 - x)$$

La siguiente gráfica muestra cómo el área del rectángulo depende de la longitud del rectángulo.



En la gráfica podemos ver que el valor más grande del área se obtiene cuando la longitud del rectángulo es 25. El área del rectángulo para esta longitud es igual a 625. Nótese que el ancho es también 25, lo cual hace que la forma sea un cuadrado de lado igual a 25.

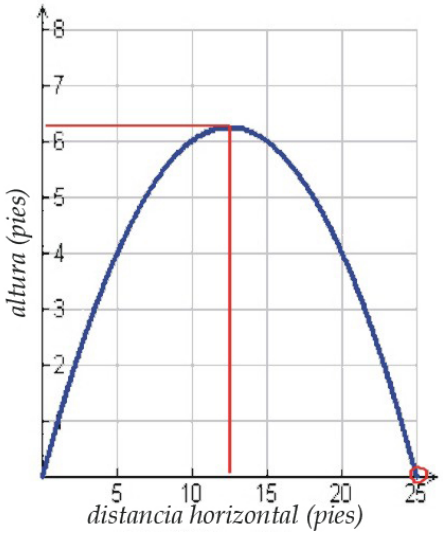
Este es un ejemplo de un problema de optimización.

Ejemplo 5 Movimiento de un proyectil

Anne está jugando golf. En el 4to punto de partida, da un golpe lento hasta el nivel de la calle. La pelota describe una trayectoria parabólica cuya ecuación es $y = x - 0.04x^2$. Esta ecuación relaciona la altura de la pelota y con la distancia horizontal que la pelota viaja hasta la calle. Las distancias están medidas en pies. ¿Qué tan lejos del punto de partida la pelota choca contra el suelo? ¿A qué distancia x del punto de partida la pelota alcanza su máxima altura?

Solución

Grafiquemos la ecuación de la trayectoria de la pelota: $y = x - 0.04x^2$.



$y = x(1 - 0.04x)$ tiene las soluciones: $x = 0$ y $x = 25$

De la gráfica podemos ver que la pelota golpea el suelo a 25 pies del punto de partida.

Vemos que la máxima altura es alcanzada a 12.5 pies del punto de partida y la máxima altura a la que la pelota llega es 6.25 pies.

Ejercicios de repaso

Reescribe las siguientes funciones en la forma intersecto. Encuentra los intersectos en $x-$ y el vértice.

1. $y = x^2 - 2x - 8$
2. $y = -x^2 + 10x - 21$
3. $y = 2x^2 + 6x + 4$

¿Está la gráfica de la parábola abierta hacia arriba o hacia abajo?

4. $y = -2x^2 - 2x - 3$
5. $y = 3x^2$
6. $y = 16 - 4x^2$

¿El vértice de cuál parábola es el mayor?

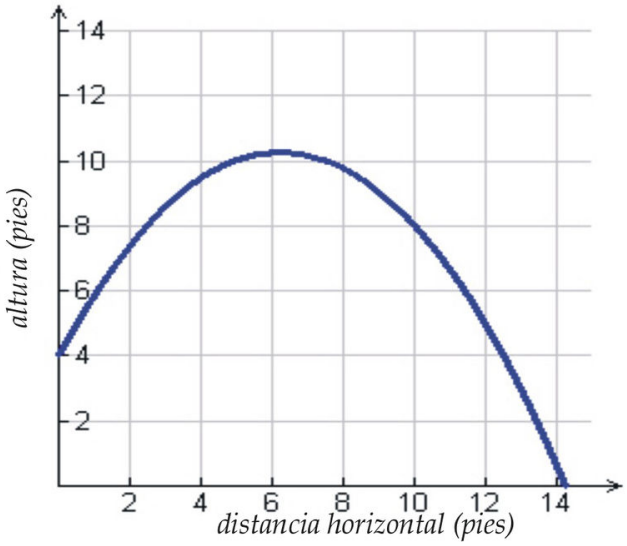
7. $y = x^2$ o $y = 4x^2$
8. $y = -2x^2$ o $y = -2x^2 - 2$
9. $y = 3x^2 - 3$ o $y = 3x^2 - 6$

¿Cuál parábola es más ancha?

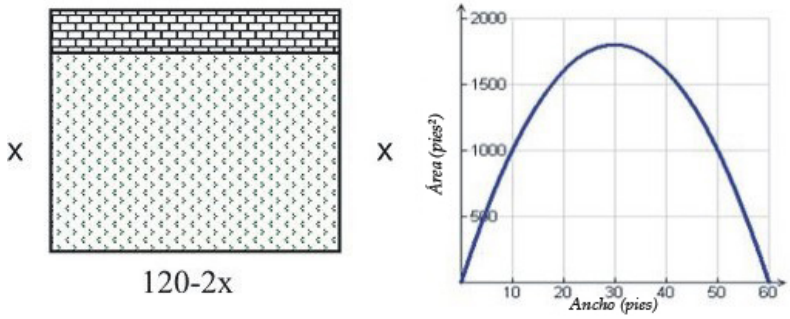
10. $y = x^2$ o $y = 4x^2$
11. $y = 2x^2 + 4$ o $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$
12. $y = -2x^2 - 2$ o $y = -x^2 - 2$

Graficar las siguientes funciones construyendo una tabla de valores. Usa el vértice y los intersectos en $x-$ como ayuda para seleccionar los valores de la tabla.

13. $y = 4x^2 - 4$
14. $y = -x^2 + x + 12$
15. $y = 2x^2 + 10x + 8$
16. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$
17. $y = x - 2x^2$
18. $y = 4x^2 - 8x + 4$
19. Nadia lanza una pelota a Peter. Peter no la atrapa y golpea el suelo. La gráfica muestra la trayectoria de la pelota a medida esta viaja por el aire. La ecuación que describe la trayectoria de la pelota es $y = 4 + 2x - 0.16x^2$. Aquí y es la altura de la pelota y x es la distancia horizontal desde donde Nadia lanza la pelota. Ambas distancias se miden en pies. ¿Qué tan lejos golpea la pelota el suelo desde donde Nadia la lanzó? ¿A qué distancia x la pelota alcanza su altura máxima desde donde Nadia la lanzó? ¿Cuál es la altura máxima?



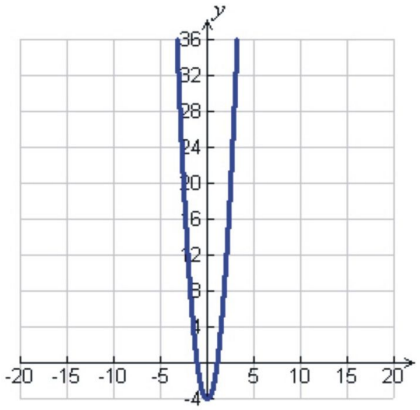
20. Peter quiere cercar una parcela de vegetales con 120 pies de cerca. Quiere poner los vegetales contra una pared ya existente de tal forma que sólo necesite cercar tres lados. La ecuación del área está dada por $a = 120x - x^2$. A partir de la gráfica encuentra qué dimensiones del rectángulo le darán la mayor área.



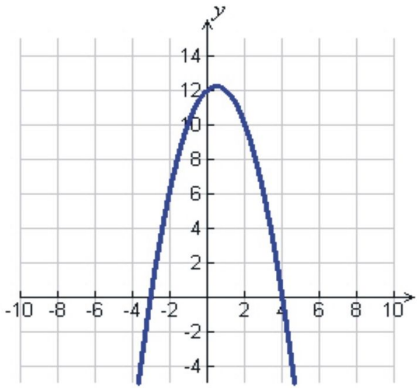
Respuestas a los ejercicios de repaso

1. $x = -2, x = 4$ Vértice(1, -9)
2. $x = 3, x = 7$ Vértice (5, 4)
3. $x = -2, x = -1$ Vértice (-3.5, 7.5)
4. Hacia abajo
5. Hacia arriba

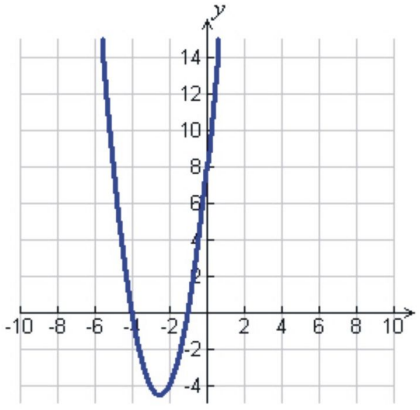
6. Hacia abajo
7. $y = x^2 + 4$
8. $y = -2x^2$
9. $y = 3x^2 - 3$
10. $y = x^2$
11. $y = \left(\frac{1}{2}\right)x^2 + 4$
12. $y = -x^2 - 2$



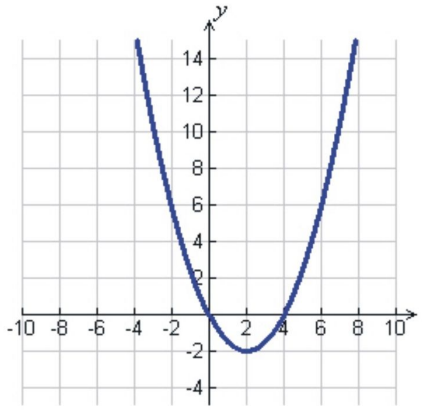
13.



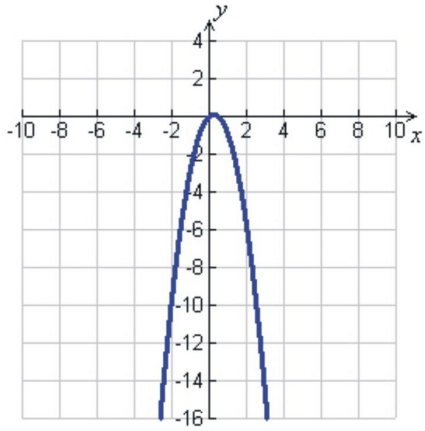
14.



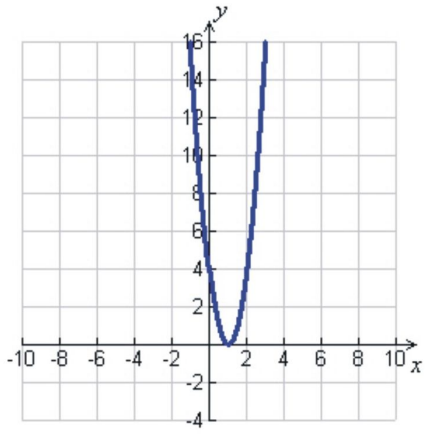
15.



16.



17.



18.

19. 14.25 pies, 6.25 pies, 10.25 pies
20. *Ancho* = 30 *pies*, *longitud* = 60 *pies*

1.2 Método gráfico para resolver funciones cuadráticas

Objetivos de aprendizaje

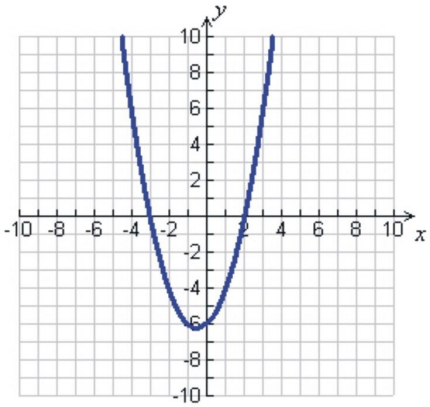
- Identificar el número de soluciones de ecuaciones cuadráticas.
- Resolver ecuaciones cuadráticas por el método gráfico.
- Encontrar o aproximar los ceros de funciones cuadráticas.
- Analizar funciones cuadráticas usando una calculadora graficadora.
- Resolver problemas del mundo real graficando funciones cuadráticas.

Introducción

En la última sección aprendimos a graficar funciones cuadráticas. Observamos que al encontrar los intersectos en $x-$ de una parábola es importante porque estos nos dicen dónde la gráfica intercepta el eje de las $x-$ y esto nos permite encontrar el vértice de la parábola. Cuando se nos pide encontrar las **soluciones** de la ecuación cuadrática en la forma $ax^2+bx+c=0$, básicamente se nos pide encontrar los intersectos en $x-$ de la función cuadrática.

Encontrar los intersectos en $x-$ de una parábola también significa encontrar las **raíces** o **ceros** de la función.

Identificación del número de soluciones para ecuaciones cuadráticas



La gráfica de una ecuación cuadrática es muy útil para identificar cuántas soluciones y qué tipos de soluciones tiene una función. Hay tres diferentes situaciones que ocurren cuando se grafica una función cuadrática.

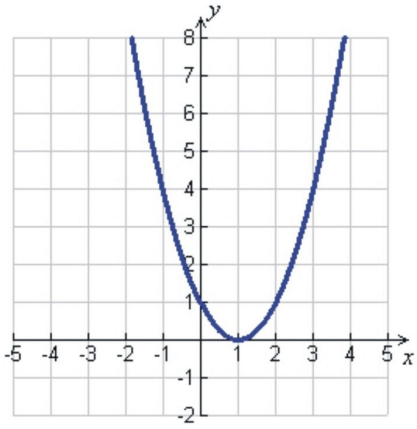
Caso 1 La parábola intercepta el eje de las $x-$ en dos puntos.

Un ejemplo de este caso es $y=x^2+x-6$.

Podemos encontrar las soluciones a la ecuación $x^2+x-6=0$ haciendo $y=0$. Resolvemos la ecuación factorando: $(x+3)(x-2)=0$, así $x=-3$ o $x=2$.

Otra forma de encontrar las soluciones es graficar la función y obtener los intersectos en $x-$ a partir de la misma. Vemos que la parábola intercepta el eje de las $x-$ en $x=-3$ y $x=2$.

Cuando la gráfica de una función cuadrática intercepta el eje x en dos puntos, obtenemos **dos soluciones distintas** para la ecuación cuadrática.



Caso 2 La parábola toca el eje $x-$ en un punto.

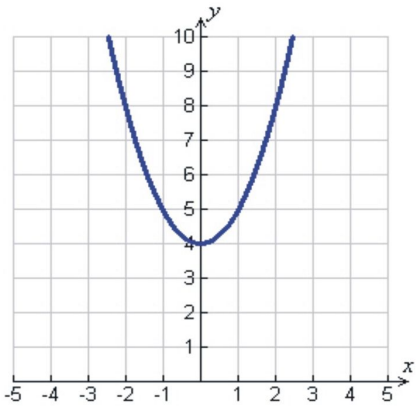
Un ejemplo de este caso es $y=x^2-2x+1$.

Podemos resolver esta ecuación factorando. Si hacemos $y=0$ y factoramos, obtnemos:$(x-1)^2$, así que $x=1$.

Ya que la función cuadrática es un cuadrado perfecto, obtuvimos una única solución para la ecuación.

Aquí podemos observar cómo luce la gráfica de esta función. Vemos que la gráfica toca el eje $x-$ en el punto $x=1$.

Cuando la gráfica de una función cuadrática toca el eje $x-$ en un punto, la ecuación cuadrática tiene una solución y es llamada una **doble raíz.**



Caos 3 La parábola no intersecta o no toca el eje $x-$.

Un ejemplo de este caso es $y=x^2+4$. Si hacemos $y=0$, obtenemos $x^2+4=0$. Este polinomio cuadrático no se puede factorar y la ecuación $x^2=-4$ no tiene soluciones reales. Cuando observamos la gráfica de esta función, vemos que la parábola no intercepta o no toca el eje $x-$.

Cuando la gráfica de una función cuadrática no intercepta o no toca el eje $x-$axis, la ecuación cuadrática no tiene **soluciones reales.**

1.2. Método gráfico para resolver funciones cuadráticas

Solución de ecuaciones cuadráticas usando gráficas

Hasta ahora hemos encontrado soluciones de ecuaciones factorando. Sin embargo, hay solo algunas funciones en la vida real que no se pueden factorar fácilmente. Como hemos observado la gráfica de una función da bastante información sobre las soluciones. Encontramos soluciones exactas o aproximadas de ecuaciones cuadráticas graficando las funciones asociadas a estas.

Ejemplo 1

Encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas graficando.

a) $-x^2+3=0$

b) $2x^2+5x-7=0$

c) $-x^2+x-3=0$

Solución

Grafiquemos cada ecuación. Desafortunadamente, ninguna de estas funciones puede ser reescrita en la forma intersecto porque no podemos factorar el lado izquierdo. Esto significa que no podemos encontrar los intersectos con el eje $x-$ y el vértice antes de graficar, ya que no has aprendido otros métodos diferentes que los de factorización.

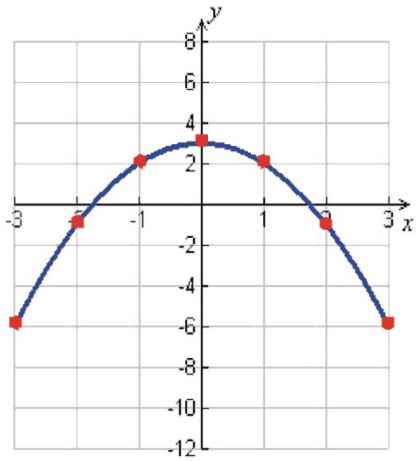
a) Para encontrar la solución a $-x^2+3=0$, necesitamos encontrar los intersectos con el eje $x-$ de $y=-x^2+3$.

Construyamos una tabla de valores para poder graficar la función.

TABLE 1.9:

x	$y=-x^2+3$
-3	$y=-(-3)^2+3=-6$
-2	$y=-(-2)^2+3=-1$
-1	$y=-(-1)^2+3=2$
0	$y=-(0)^2+3=3$
1	$y=-(-1)^2+3=2$
2	$y=-(2)^2+3=-1$
3	$y=-(3)^2+3=-6$

Graficamos los puntos y obtenemos la siguiente gráfica:



De la gráfica podemos ver que los intersectos con el eje $x-$ son aproximadamente $x = 1.7$**y** $x = -1.7$.

Estas son las soluciones para la ecuación $-x^2 + 3 = 0$.

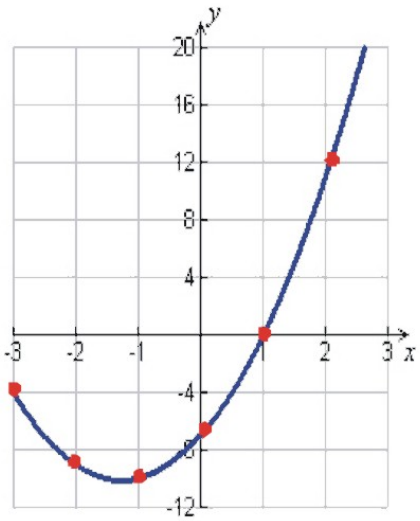
b) Para resolver la ecuación $2x^2 + 5x - 7 = 0$, necesitamos encontrar los intersecto con el eje $x-$ de $y = 2x^2 + 5 - 7$.

Construyamos una tabla de valores para poder graficar la función.

TABLE 1.10:

x	$y = 2x^2 + 5x - 7$
-3	$y = 2(-3)^2 + 5(-3) - 7 = -4$
-2	$y = 2(-2)^2 + 5(-2) - 7 = -9$
-1	$y = 2(-1)^2 + 5(-1) - 7 = -10$
0	$y = 2(0)^0 + 5(0) - 7 = -7$
1	$y = 2(1)^2 + 5(1) - 7 = 0$
2	$y = 2(2)^2 + 5(2) - 7 = 11$
3	$y = 2(3)^2 + 5(3) - 7 = 26$

Graficamos los puntos y obtenemos la siguiente gráfica:

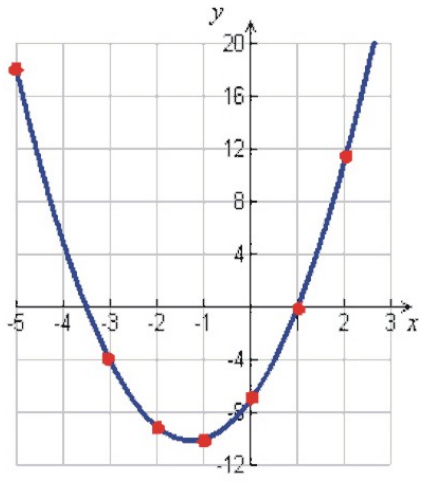


Ya que solo podemos observar un intersecto con el eje $x-$ en esta gráfica, necesitamos usar puntos más pequeños que $x = -3$ y reconstruir la gráfica.

TABLE 1.11:

x	$y = 2x^2 + 5x - 7$
-5	$y = 2(-5)^2 + 5(-5) - 7 = 18$
-4	$y = 2(-4)^2 + 5(-4) - 7 = 5$

Aquí se muestra la gráfica otra vez con ambos intersectos con el eje $x-$:



En la gráfica podemos observar que los intersectos con el eje $x-$ son $x = 1$**y** $x = -3.5$.

Estas son las soluciones para la ecuación $2x^2 + 5x - 7 = 0$.

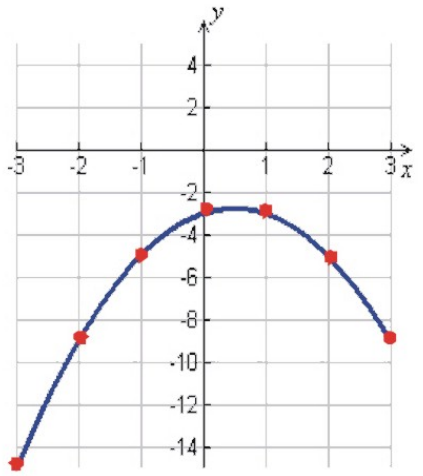
c) Para resolver la ecuación $-x^2 + x - 3 = 0$, necesitamos encontrar los intersectos con el eje $x-$ de $y = -x^2 + x - 3$.

Construyamos una tabla de valores para poder graficar la función.

TABLE 1.12:

x	$y = -x^2 + x - 3.$
-3	$y = -(-3)^2 + (-3) - 3 = -15$
-2	$y = -(-2)^2 + (-2) - 3 = -9$
-1	$y = -(-1)^2 + (-1) - 3 = -5$
0	$y = -(0)^2 + (0) - 3 = -3$
1	$y = -(1)^2 + (1) - 3 = -3$
2	$y = -(-2)^2 + (2) - 3 = -5$
3	$y = -(3)^2 + (3) - 3 = -9$

Graficando los puntos obtenemos la siguiente gráfica:



Esta gráfica no tiene intersectos con el eje $x-$, por lo que la ecuación $-x^2 + x - 3 = 0$ no tiene **soluciones reales.**

Encontrar o aproximar los ceros de funciones cuadráticas

De la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, podemos encontrar las **raíces** o **ceros** de la función. Los ceros son también los intersectos con el eje $x-$ de la gráfica y resuelven la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Cuando los ceros de la función son valores enteros es fácil obtener los valores exactos desde la gráfica. Cuando los ceros no son enteros debemos aproximar sus valores.

Hagamos algunos ejemplos más para encontrar ceros de funciones cuadráticas.

Ejemplo 2 Encontrar los ceros de las siguientes funciones cuadráticas.

a) $y = -x^2 + 4x - 4$

b) $y = 3x^2 - 5x$

Solución

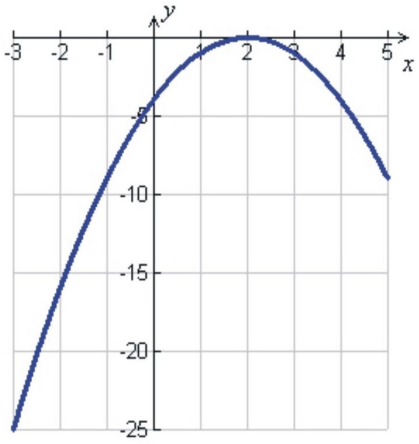
a) Graficar la función $y = -x^2 + 4x - 4$ y obtener los valores de los intersectos con el eje $x-$ a partir de la gráfica.

Construyamos una tabla de valores.

TABLE 1.13:

x	$y = -x^2 + 4x - 4$
-3	$y = -(-3)^2 + 4(-3) - 4 = -25$
-2	$y = -(-2)^2 + 4(-2) - 4 = -16$
-1	$y = -(-1)^2 + 4(-1) - 4 = -9$
0	$y = -(0)^2 + 4(0) - 4 = -4$
1	$y = -(1)^2 + 4(1) - 4 = -1$
2	$y = -(2)^2 + 4(2) - 4 = 0$
3	$y = -(3)^2 + 4(3) - 4 = -1$
4	$y = -(4)^2 + 4(4) - 4 = -4$
5	$y = -(5)^2 + 4(5) - 4 = -9$

A continuación se muestra la gráfica de esta función.



La función tiene una **raíz doble** en $x = 2$.

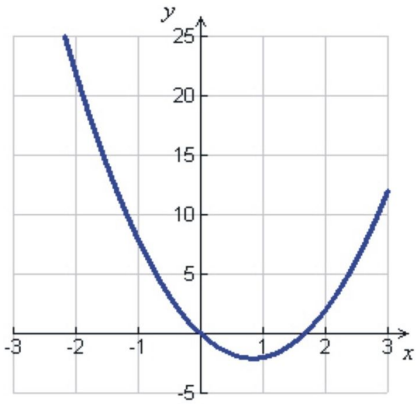
b) Graficar la función $y = 3x^2 - 5x$ y obtener los intersectos con el eje $x-$ a partir de la gráfica.

Construyamos una tabla de valores.

TABLE 1.14:

x	$y = 3x^2 - 5x$
-3	$y = 3(-3)^2 - 5(-3) = 42$
-2	$y = 3(-2)^2 - 5(-2) = 22$
-1	$y = 3(-1)^2 - 5(-1) = 8$
0	$y = 3(0)^2 - 5(0) = 0$
1	$y = 3(1)^2 - 5(1) = -2$
2	$y = 3(2)^2 - 5(2) = 2$
3	$y = 3(3)^2 - 5(3) = 12$

A continuación se muestra la gráfica de esta función.



La función tiene dos raíces: $x = 0$**y** $x \approx 1.7$.

Análisis de funciones cuadráticas usando una calculadora graficadora

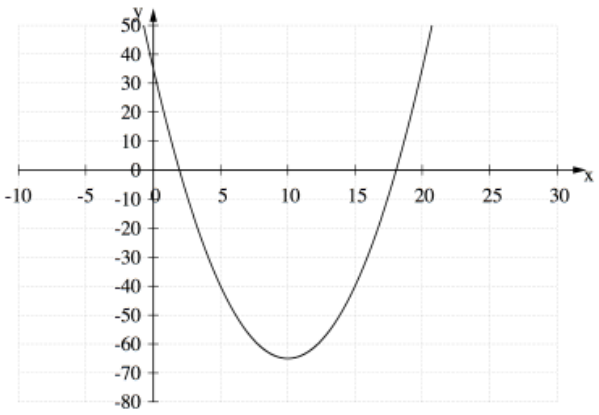
Una calculadora graficadora es muy útil para graficar funciones cuadráticas. Una vez la función ha sido graficada, podemos usar la calculadora para encontrar información importante tal como las raíces de la función o el vértice de la función.

Ejemplo 3

Usemos la calculadora graficadora para analizar la gráfica de $y = x^2 - 20x + 35$.

1. **Graficar** la función.

Presiona el botón **[Y=]** e introduce "$X^2 - 20X + 35$" a la par de $[Y_1 =]$. (Nota: X es uno de los botones de la calculadora)



Presiona el botón **[GRAPH]**. Esta es la gráfica que deberías ver. Si esto no es lo que se ve, se debe cambiar el tamaño de la ventana. Para la gráfica de la derecha se usa el tamaño de ventana $\text{XMIN} = -10, \text{XMAX} = 30$ y $\text{YMIN} = -80, \text{YMAX} = 50$. Para cambiar el tamaño de la ventana presiona el boton **[WINDOW]**.

2. Encontrar las **raíces.**

Hay por lo menos tres formas de encontrar las raíces.

Usa **[TRACE]** para desplazarte sobre los intersectos con el eje $x-$. El valor aproximado de las raíces se muestra en la pantalla. Puedes mejorar la aproximación por medio de una ampliación de la pantalla.

o

Usa **[TABLE]** y desplázate a través de los valores hasta que encuentres los valores de Y iguales a cero. Puedes cambiar al exactitud de la solución cambiando el tamaño de los valores con la función **[TBLSET]**.

o

Usa **[2nd] [TRACE]** (botón 'calc') y usa la opción 'cero'.

Mueve el cursor a la izquierda de una de las raíces y presiona **[ENTER]**.

Mueve el cursor a la derecha de la misma raíz y presiona **[ENTER]**.

Mueve el cursor cerca de la raíz y presiona **[ENTER]**.

La pantalla mostrará el valor de la raíz. Para la raíz al lado izquierdo obtenemos $x = 1.9$.

Repite el procedimiento para la otra raíz. Para la raíz del lado derecho obtenemos $x = 18$.

3. Encontrar el **vértice**

Hay tres formas para encontrar el vértice.

Use **[TRACE]** para moverse sobre el punto más alto o más bajo de la gráfica. El valor aproximado de las raíces se mostraran en la pantalla.

o

Usa **[TABLE]** y desplázate a través de los valores hasta que encuentres los valores mayores o menores de Y.

Puedes cambiar la exactitud de la solución cambiando el tamaño de los valores usando la función **[TBLSET]**.

o

Usa **[2nd] [TRACE]** y usa la opción 'maximum' si el vértice es un máximo o la opción 'minimum' si el vértice es un mínimo.

Mueve el cursor a izquierda del vértice y presiona **[ENTER]**.

Mueve el cursor a la derecha del vértice y presiona **[ENTER]**.

Mueve el cursor cerca del vértice y presiona **[ENTER]**.

La pantalla mostrará los valores de x y y del vértice.

Para este ejemplo obtenemos $x = 10$ y $x = -65$.

Solución de problemas del mundo real graficando funciones cuadráticas

Ahora usaremos los métodos que aprendimos para resolver algunos ejemplos de problemas del mundo real usando funciones cuadráticas.

Ejemplo 4 Movimiento de un proyectil

Andrew es un arquero habilidoso. Lanza una flecha que toma una trayectoria parabólica. A continuación se presenta una ecuación de la altura de la flecha con respecto al tiempo.

$$y = -4.9t^2 + 48t$$

y es la altura en metros y t es el tiempo en segundos. Encuentra cuánto tiempo toma la flecha en regresar al suelo.

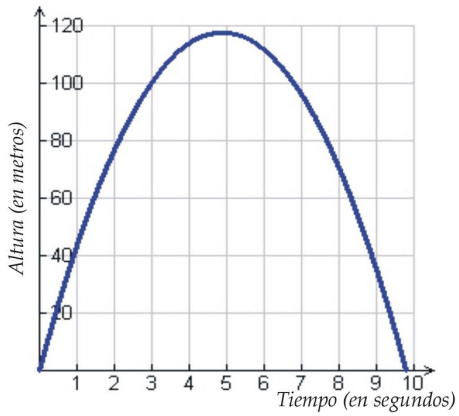
Solución

Grafiquemos la ecuación construyendo una tabla de valores.

TABLE 1.15:

t	$y = -4.9t^2 + 48t$
0	$y = -4.9(0)^2 + 48(0) = 0$
1	$y = -4.9(1)^2 + 48(1) = 43.1$
2	$y = -4.9(2)^2 + 48(2) = 76.4$
3	$y = -4.9(3)^2 + 48(3) = 99.9$
4	$y = -4.9(4)^2 + 48(4) = 113.6$
5	$y = -4.9(5)^2 + 48(5) = 117.5$
6	$y = -4.9(6)^2 + 48(6) = 111.6$
7	$y = -4.9(7)^2 + 48(7) = 95.9$
8	$y = -4.9(8)^2 + 48(8) = 70.4$
9	$y = -4.9(9)^2 + 48(9) = 35.1$
10	$y = -4.9(10)^2 + 48(10) = -10$

A continuación se presenta la gráfica de la función.



Las raíces de la función son aproximadamente $x = 0$ seg y $x = 9.8$ seg. La primer raiz dice que para el tiempo igual a 0 segundos la altura de la flecha es 0 metros. La segunda raíz dice que a la flecha le toma aproximadamente 9.8 segundos para retornar al suelo.

Preguntas de repaso

Encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones graficándolas.

1. $x^2 + 3x + 6 = 0$
2. $-2x^2 + x + 4 = 0$
3. $x^2 - 9 = 0$
4. $x^2 + 6x + 9 = 0$
5. $10x^2 - 3x^2 = 0$
6. $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = 0$

Encontrar las raíces de las siguientes funciones cuadráticas graficándolas.

7. $y = -3x^2 + 4x - 1$
8. $y = 9 - 4x^2$
9. $y = x^2 + 7x + 2$
10. $y = -x^2 - 10x - 25$
11. $y = 2x^2 - 3x$
12. $y = x^2 - 2x + 5$

Usando tu calculadora graficadora

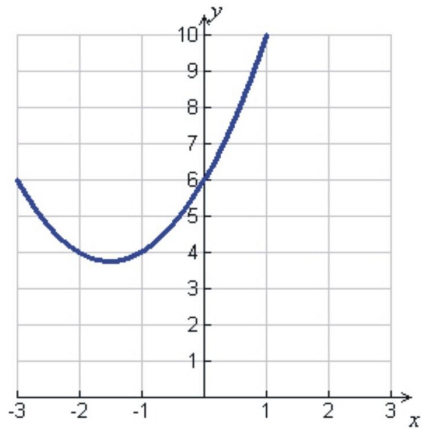
(a) Encuentra las raíces de los polinomios cuadráticos.

(b) Encuentra el vértice de los polinomios cuadráticos.

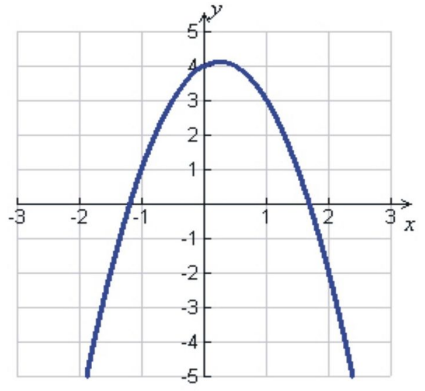
13. $y = x^2 + 12x + 5$
14. $y = x^2 + 3x + 6$
15. $y = -x^2 - 3x + 9$
16. Peter lanza una pelota y esta toma una trayectoria parabólica. A continuación se presenta la ecuación de la altura de la pelota con respecto al tiempo: $y = -16t^2 + 60t$ Donde y es la altura en pies y t es el tiempo en segundos. Encontrar cuánto tiempo le lleva a la pelota retornar al suelo.
17. Usa tu calculadora graficadora para resolver el ejemplo 5. Debes obtener las mismas respuestas que se obtuvieron a través de la construcción manual de la gráfica, con la diferencia que usando tu calculadora ¡lo harás más rápido!

Respuestas a los ejercicios de repaso

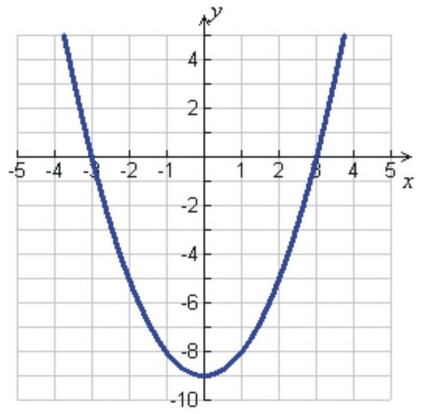
1. Soluciones no reales



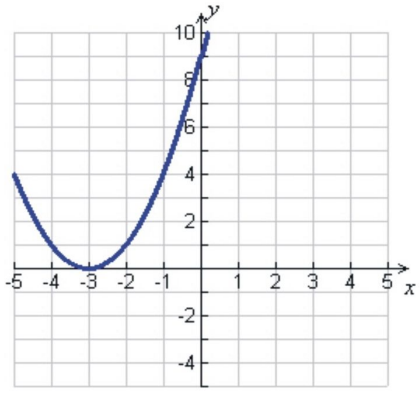
2. $x = -1.2, x = 1.87$



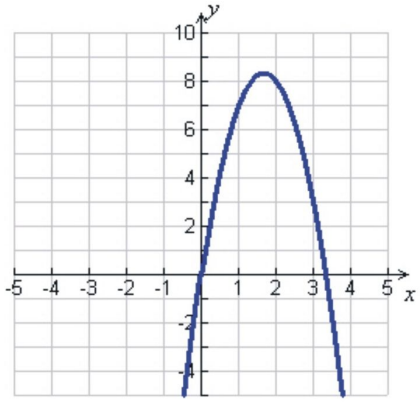
3. $x = -3, x = 3$



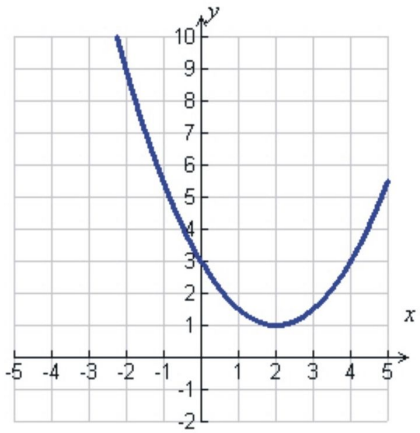
4. $x = -3$ raíz doble.



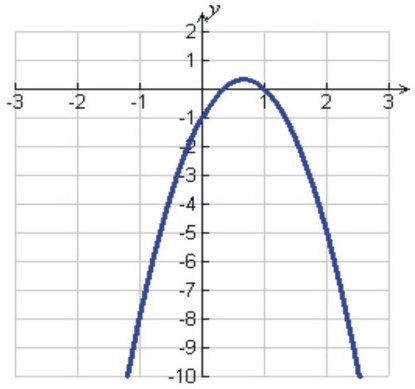
5. $x = 0, x = 3.23$



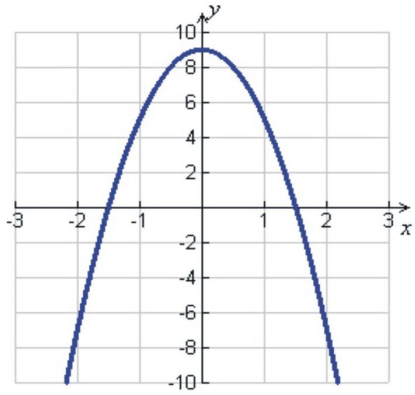
6. Soluciones no reales.



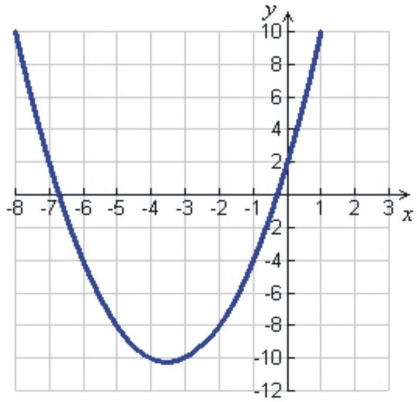
7. $x = 0.3, x = 1$



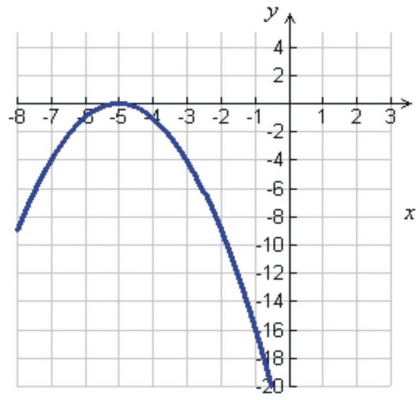
8. $x = -1.5, x = 1.5$



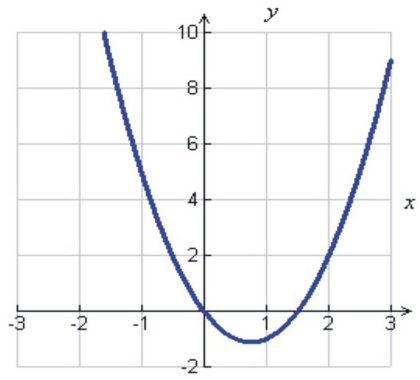
9. $x = -6.7, x = 0.3$



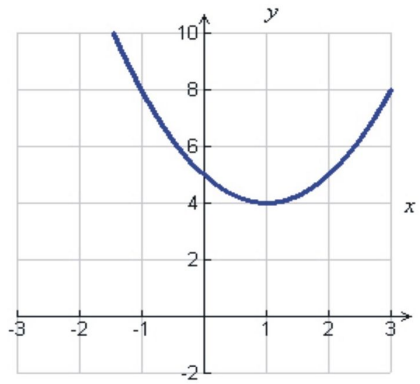
10. $x = -5$ raíz doble



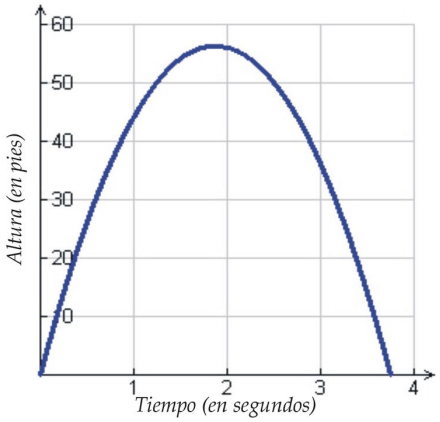
11. $x = 0, x = 1.5$



12. Soluciones no reales.



13. .
14. .
15. .
16. time = 3.75 *second*



17. .

1.3 Ecuaciones cuadráticas a través de raíces cuadradas

Objetivos de aprendizaje

- Resolver ecuaciones cuadráticas que envuelven cuadrados perfectos.
- Aproximar soluciones de ecuaciones cuadráticas.
- Resolver problemas del mundo real usando funciones cuadráticas y raíces cuadradas.

Introducción

Hasta acá sabes cómo resolver ecuaciones cuadráticas usando factorización. Sin embargo, este método trabaja sólo si un polinomio cuadrático puede ser factorizado. Desafortunadamente en la práctica la mayoría de los polinomios cuadráticos no pueden ser factorizados. En esta sección continuará aprendiendo nuevos métodos que pueden ser usados para resolver ecuaciones cuadráticas. En particular examinaremos ecuaciones en las cuales podremos sacar raíz cuadrada en ambos de la ecuación para poder obtener el resultado.

Resolver ecuaciones cuadráticas que involucran cuadrados perfectos

Primeramente, examinemos la ecuación cuadrática del tipo

$x^2 - c = 0$

Podemos resolver esta ecuación despejando el término x^2: $x^2 = c$

Una vez el término x^2 está despejado, podemos sacar raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación. Recuerda que cuando se saca la raíz cuadrada obtenemos dos respuestas: la raíz cuadrada positiva y la raíz cuadrada negativa.

$$x = \sqrt{c} \qquad \text{y} \qquad x = -\sqrt{c}$$

Con frecuencia esto se escribe como $x = \pm\sqrt{c}$.

Ejemplo 1

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas

a) $x^2 - 4 = 0$

b) $x^2 - 25 = 0$

Solución

a) $x^2 - 4 = 0$

Despejar $x^2 x^2 = 4$

Sacar la raíz cuadrada en ambos lados $x = \sqrt{4}$ y $x = -\sqrt{4}$

Respuesta $x = 2$ y $x = -2$

b) $x^2 - 25 = 0$

Despejar x^2	$x^2 = 25$
Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados	$x = \sqrt{25}$ y $x = -\sqrt{25}$

Respuesta $x = 5$ y $x = -5$

Otro tipo de ecuación donde podemos encontrar la solución usando la raíz cuadrada es

$$ax^2 - c = 0$$

Podemos resolver esta ecuación despejando el término x^2

$$ax^2 = c$$
$$x^2 = \frac{c}{a}$$

Ahora podemos sacar la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}} \qquad \text{y} \qquad x = -\sqrt{\frac{c}{a}}$$

Frecuentemente esto se escribe como $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Ejemplo 2

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $9x^2 - 16 = 0$

b) $81x^2 - 1 = 0$

Solución

a) $9x^2 - 16 = 0$

Despejar x^2.	$9x^2 = 16$
	$x^2 = \frac{16}{9}$

Sacar la raiz cuadrada en ambos lados. $x = \sqrt{\frac{16}{9}}$ and $x = -\sqrt{16}9$

Respuesta: $x = \frac{4}{3}$ y $x = -\frac{4}{3}$

b) $81x^2 - 1 = 0$

Despejar x^2 $81x^2 = 1$

$$x^2 = \frac{1}{81}$$

Sacar la raíz cuadrada en ambos lados $x = \sqrt{\frac{1}{81}}$ y $x = -\sqrt{\frac{1}{81}}$

Respuesta $x = \frac{1}{9}$ y $x = -\frac{1}{9}$

Como has visto previamente, algunas ecuaciones cuadráticas no tienen soluciones reales.

Ejemplo 3

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 1 = 0$

b) $4x^2 + 9 = 0$

Solución

a) $x^2 + 1 = 0$

Despejar x^2 $x^2 = -1$

Sacar la raíz cuadrada en ambos lados: $x = \sqrt{-1}$ y $x = -\sqrt{-1}$

Respuesta Raíces cuadradas de números negativos no dan como resultado números reales, por lo que no hay **soluciones reales** para esta ecuación.

b) $4x^2 + 9 = 0$

Despejar x^2 $4x^2 = -9$

$$x^2 = -\frac{9}{4}$$

Sacar la raíz cuadrada en ambos lados $x = \sqrt{-\frac{9}{4}}$ y $x = -\sqrt{-\frac{9}{4}}$

Respuesta No hay **soluciones reales.**

También podemos obtener la función raíz cuadrada en algunas ecuaciones cuadráticas donde un lado de la ecuación es un cuadrado perfecto. Esto es verdad si una ecuacion es de la forma

$(x-2)^2 = 9$

Ambos lados de la ecuación son cuadrados perfectos. Sacamos la raíz cuadrada en ambos lados.

$x - 2 = 3$ y $x - 2 = -3$

Resolver ambas ecuaciones

Respuesta $x = 5$ y $x = -1$

Ejemplo 4

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $(x-1)^2 = 4$

b) $(x+3)^2=1$

Solución

a) $(x-1)^2=4$

Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados.	$x-1=2$ y $x-1=-2$
Resolver cada ecuaciÃ³n.	$x=3$ y $x=-1$

Respuesta $x=3$ y $x=-1$

b) $(x+3)^2=1$

Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados.	$x+3=1$ y $x+3=-1$
Resolver cada ecuaciÃ³n.	$x=-2$ y $x=-4$

Podría ser necesario factorizar el lado derecho de la ecuación como un cuadrado perfecto antes de aplicar el método descrito arriba.

Ejemplo 5

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2+8x+16=25$

b) $4x^2-40x+25=9$

Solución

a) $x^2+8x+16=25$

Factorizar el lado derecho.	$x^2+8x+16=(x+4)^2$	asÃ que $(x+4)^2=25$
Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados.	$x+4=5$ y $x+4=-5$	
Resover cada ecuaciÃ³n.	$x=1$ y $x=-9$	

Respuesta $x=1$ y $x=-9$

b) $4x^2-20x+25=9$

Factorizar el lado derecho.	$4x^2-20x+25=(2x-5)^2$	asÃ que $(2x-5)^2=9$
Sacar la raÃz cuadrada en ambos casos.	$2x-5=3$ y $2x-5=-3$	
Resolver cada ecuaciÃ³n.	$2x=8$ y $2x=2$	

Respuesta $x=4$ and $x=1$

Aproximación de las soluciones de ecuaciones cuadráticas

Vamos a usar los métodos que aprendimos hasta ahora en esta sección para encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones cuadráticas. Podemos obtener soluciones aproximadas cuando sacamos la raíz cuadrada que no nos da una respuesta exacta.

Ejemplo 6

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 - 3 = 0$

b) $2x^2 - 9 = 0$

Solución

a)

Despejar x^2.	$x^2 = 3$
Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados.	$x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$

Respuesta $x \approx 1.73$ y $x \approx -1.73$

b)

Despejar x^2.	$2x^2 = 9$ asÃ que $x^2 = \frac{9}{2}$
Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados.	$x = \sqrt{\frac{9}{2}}$ y $x = -\sqrt{\frac{9}{2}}$

Respuesta $x \approx 2.12$ y $x \approx -2.12$

Ejemplo 7

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $(2x+5)^2 = 10$

b) $x^2 - 2x + 1 = 5$

Solución.

a)

Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados.	$2x+5 = \sqrt{10}$ y $2x+5 = -\sqrt{10}$
Resolver ambas ecuaciones.	$x = \frac{-5+\sqrt{10}}{2}$ y $x = \frac{-5-\sqrt{10}}{2}$

Respuesta $x \approx -0.92$ y $x \approx -4.08$

b)

Factorizar el lado derecho.	$(x-1)^2 = 5$
Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados.	$x-1 = \sqrt{5}$ y $x-1 = -\sqrt{5}$
Resolver cada ecuaciÃ³n.	$x = 1+\sqrt{5}$ y $x = 1-\sqrt{5}$

Respuesta $x \approx 3.24$ y $x \approx -1.24$

Resolver problemas del mundo real usando funciones cuadráticas y raíces cuadradas

Hay muchos problemas del mundo real que requieren el uso de ecuaciones cuadráticas para poder llegar a una solución. En esta sección, examinaremos problemas sobre caída de objetos bajo la influencia de la gravedad. Cuando

los objetos se **dejan caer** desde una altura, no poseen velocidad inicial y la fuerza que los hace moverse hacia el suelo se debe a la gravedad. La aceleración de la gravedad sobre la Tierra está dada por

$$g = -9.8 \text{ m/s}^2 \qquad \text{o} \qquad g = -32 \ ft/s^2$$

El signo negativo indica una dirección hacia abajo. Podemos asumir que la gravedad es constante para los problemas que examinaremos porque estaremos cerca de la superficie de la tierra. La aceleración de la gravedad decrece a medida que un objeto se mueve alejándose de la Tierra. También es diferente en otros cuerpos celestiales tales como la Luna.

La ecuación que describe la altura de un objeto en caída libre está dada por

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

El término y_0 representa la altura inicial del objeto. t es el tiempo y g es la aceleración de la gravedad. Hay dos opciones para la ecuación que puedes usar.

$y = -4.9t^2 + y_0$	Si deseas obtener la altura en metros.
$y = -16t^2 + y_0$	Si deseas obtener la altura en pies.

Ejemplo 8 Caída libre

¿Cuánto tiempo le lleva a una pelota para caer desde un techo que se encuetra a 25 pies del suelo?

Solución

Ya que la altura estÃ¡ dada en pies, usaremos la ecuaciÃ³n	$y = -16t^2 + y_0$
La altura inicial es $y_0 = 25$ pies, asÃ que	$y = -16t^2 + 25$
La altura cuando la pelota choca contra el suelo es $y = 0$, asÃ que	$0 = -16t^2 + 25$
Resolver para t	$16t^2 = 25$
	$t^2 = \frac{25}{16}$
	$t = \frac{5}{4}$ o $t = -\frac{5}{4}$

Podemos descartar la solución $t = -\frac{5}{4}$ ya que solo los valores positivos del tiempo tienen sentido en este caso.

Respuesta Le toma 1.25 segundos a la pelota caer al suelo.

Ejemplo 9 Caída libre

Una roca se deja caer desde lo alto de un acantilado y choca contra el suelo 7.2 segundos después. ¿Qué tan alto es el acantilado en metros?

Solución

Ya que queremos la altura en	$y = -4.9t^2 + y_0$
metros usamos la ecuaciÃ³n	
El tiempo de vuelo es $t = 7.2$ segundos	$y = -4.9(7.2)^2 + y_0$
La altura cuando la pelota choca	$0 = -4.9(7.2)^2 + y_0$
contra el suelo es $y = 0,$ asÃ que	
Simplificar	$0 = -254 + y_0$ so $y_0 = 254$

Respuesta El acantilado tiene 254 metros de altura.

Ejemplo 10

Víctor deja caer una manzana a través de la ventana desde el piso número 10^{to}*, el cual se encuentra a 120 pies del suelo. Un segundo después Juan deja caer una naranja desde la ventana del* 6^{to} *piso que se encuetra a 72 pies del suelo. ¿Cuál fruta chocará primero contra el suelo? ¿Cuánto es la diferencia entre el tiempo en que las frutas chocan contra el suelo?*

Solución Encontremos el tiempo de vuelo para cada una de las frutas.

Para la manzana tenemos lo siguiente:

Como tenemos la altura en	$y = -16t^2 + y_0$
pies usamos la ecuaciÃ³n	
La altura inicial es $y_0 = 120$ pies.	$y = -16t^2 + 120$
La altura cuando la manzana choca	$0 = -16t^2 + 120$
contra el suelo es $y = 0,$ asÃ que	
Resolver para t	$16t^2 = 120$
	$t^2 = \frac{120}{16} = 7.5$
	$t = 2.74$ o $t = -2.74$ segundos.

Para la naranja tenemos:

La altura inicial es $y_0 = 72$ pies.	$0 = -16t^2 + 72$
Resolver para t.	$16t^2 = 72$
	$t^2 = \frac{72}{16} = 4.5$
	$t = 2.12$ o $t = -2.12$ segundos

Pero no olvidemos que la naranja fue lanzada un segundo después, así que añadamos un segundo al tiempo de la naranja. Esta choca contra el suelo 3.12 segundos después que Víctor dejó caer la manzana.

Respuesta La manzana choca contra el suelo primero. Esta choca contra el suelo 0.38 segundos antes que la naranja. (Con suerte, nadie estaba en el suelo al momento de este experimento. ¡No traten esto en casa, niños!)

Ejercicios de repaso

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

1. $x^2 - 1 = 0$
2. $x^2 - 100 = 0$
3. $x^2 + 16 = 0$
4. $9x^2 - 1 = 0$
5. $4x^2 - 49 = 0$
6. $64x^2 - 9 = 0$
7. $x^2 - 81 = 0$
8. $25x^2 - 36 = 0$
9. $x^2 + 9 = 0$
10. $x^2 - 16 = 0$
11. $x^2 - 36 = 0$
12. $16x^2 - 49 = 0$
13. $(x-2)^2 = 1$
14. $(x+5)^2 = 16$
15. $(2x-1)^2 - 4 = 0$
16. $(3x+4)^2 = 9$
17. $(x-3)^2 + 25 = 0$
18. $x^2 - 6 = 0$
19. $x^2 - 20 = 0$
20. $3x^2 + 14 = 0$
21. $(x-6)^2 = 5$
22. $(4x+1)^2 - 8 = 0$
23. $x^2 - 10x + 25 = 9$
24. $x^2 + 18x + 81 = 1$
25. $4x^2 - 12x + 9 = 16$
26. $(x+10)^2 = 2$
27. $x^2 + 14x + 49 = 3$
28. $2(x+3)^2 = 8$
29. Susan deja caer su cámara en el río desde un puente que tiene 400 pies de altura. ¿Cuánto tiempo tomará antes que ella escuche caer la cámara al agua?
30. Una roca tarda 5.3 segundos para chocar contra el agua cuando esta es arrojada desde lo alto de un acantilado. ¿Cuál es la altura del acantilado en metros?
31. Nisha deja caer un piedra desde el techo de un edificio que tiene una altura de 50 pies. Ashaan deja caer una moneda de 25 centavos desde la parte alta de la ventana de la tienda que tiene una altura de 40 pies, exactamente medio segundo después que Nisha deja caer la piedra. ¿Cuál chocará primero contra el suelo?

Respuestas a los ejercicios de repaso

1. $x = 1, x = -1$
2. $x = 10, x = -10$
3. Soluciones no reales.
4. $x = \frac{1}{3}, x = -\frac{1}{3}$
5. $x = \frac{7}{2}, x = -\frac{7}{2}$
6. $x = \frac{3}{8}, x = -\frac{3}{8}$

7. $x = 9, x = -9$
8. $x = \frac{6}{5}, x = -\frac{6}{5}$
9. No tiene solución real.
10. $x = 4, x = -4$
11. $x = 6, x = -6$
12. $x = \frac{7}{4}, x = -\frac{7}{4}$
13. $x = 3, x = 1$
14. $x = -1, x = -9$
15. $x = \frac{3}{2}, x = -\frac{1}{2}$
16. $x = -\frac{1}{3}, x = -\frac{7}{3}$
17. No tiene solución real.
18. $x \approx 2.45, x \approx -2.45$
19. $x \approx 4.47, x \approx -4.47$
20. No tiene solución real.
21. $x \approx 8.24, x \approx 3.76$
22. $x \approx 0.46, x \approx -0.96$
23. $x = 8, x = 2$
24. $x = -8, x = -10$
25. $x = \frac{7}{2}, x = -\frac{1}{2}$
26. $x \approx -8.59, x \approx -11.41$
27. $x \approx -5.27, x \approx -8.73$
28. $x = -1, x = -5$
29. $t = 5$ *segundos*
30. $y_0 = 137.6$ *metros*
31. .

1.4 Solución de ecuaciones cuadráticas por completación de cuadrados

Objetivos de aprendizaje

- Completar el cuadrado de una expresión cuadrática.
- Resolver ecuaciones cuadráticas por completación de cuadrados.
- Resolver ecuaciones cuadráticas en forma estándar.
- Graficar ecuaciones cuadráticas en forma vértice.
- Resolver problemas del mundo real usando funciones por completación de cuadrados.

Introducción

Vismosen la última sección que si tienes una ecuación cuadrática de la forma

$(x-2)^2 = 5$

Podemos resolverla fácilmente sacando la raíz cuadrada en cada lado.

$x-2 = \sqrt{5}$ y $x-2 = -\sqrt{5}$

Entonces simplificamos y resolvemos.

$x = 2+\sqrt{5} \approx 4.24$ y $x = 2-\sqrt{5} \approx -0.24$

Desafortunadamente, las ecuaciones cuadráticas usualmente no son escritas de esta bonita forma. En esta sección, aprenderás el método de **completación de cuadrados** en el cual tomas cualquier ecuación cuadrática y la reescribes en una forma tal que puedas sacar la raíz cuadrada en ambos lados.

Completación del cuadrado de una expresión cuadrática

El propósito del método de completar los cuadrados es reescribir un expresión cuadrática de tal forma que esta contenga un trinomio cuadrado perfecto que pueda ser factorizado como el cuadrado de un binomio. Recuerda que el cuadrado de un binomio es expansible. A continuación se presenta un ejemplo.

$$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$$
$$(x-a)^2 = x^2-2ax+a^2$$

Para poder obtener un trinomio cuadrado perfecto, necesitamos dos términos que sean cuadrados perfectos y un término que es el doble del producto de las raíces cuadradas de los otros dos términos.

Ejemplo 1

Completar el cuadrado para la expresión x^2+4x.

Solución Para completar el cuadrado, necesitamos un término constante que convierta la expresión en un trinomio cuadrado perfecto. Ya que el término de en medio en un trinomio cuadrado perfecto es siempre dos veces el producto de las raíces cuadradas de los otros dos términos, escribimos nuestra expresión como

$$x^2 + 2(2)(x)$$

Vemos que la constante que andamos buscando debe ser 2^2.

$$x^2 + 2(2)(x) + 2^2$$

Respuesta Sumando 4, esta puede ser factorizada como: $(x+2)^2$

Pero hemos cambiado el valor de esta expresión $x^2 + 4x \neq (x+2)^2$. Después mostraremos cómo tomar en cuenta este problema. Necesitas sumar y restar el término constante.

Este fue un ejemplo relativamente fácil porque ax^2, fue 1. Si $a \neq 1$, debemos*a* de la expresión completa antes de completar el cuadrado.

Ejemplo 2

Completar el cuadrado para la expresión $4x^2 + 32x$

Solución

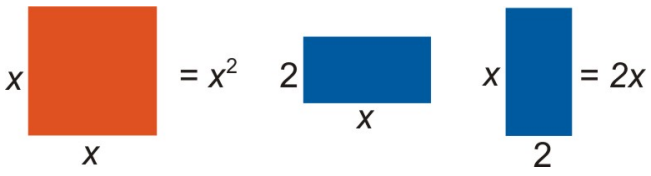
Factorar el coeficiente del tÃ©rmino x^2 .	$4(x^2 + 8x)$
Ahora completar el cuadrado de la	$4(x^2 + 2(4)(x))$
expresiÃ³n en parÃ©ntesis y reescribir la expresiÃ³n.	
Completamos el cuadrado sumando	$4(x^2 + 2(4)(x) + 4^2$
la constante 4^2.	
Factorizar el trinomio cuadrado perfecto	$4(x+4)^2$
dentro del parÃ©ntesis.	

Nuestra respuesta es $4(x+4)^2$.

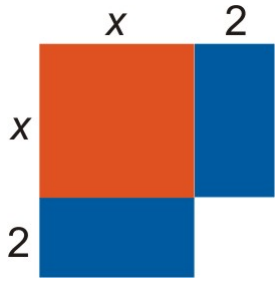
La expresión **"completación del cuadrado"** proviene de una interpretación geométrica de esta situación. Volvamos a analizar la expresión cuadrática del ejemplo 1.

$x^2 + 4x$

Podemos pensar esta expresión como la suma de tres áreas. El primer término representa el área de un cuadrado de lado x. La segunda expresión representa las áreas de dos rectángulos con una longitud de 2 y un ancho x:

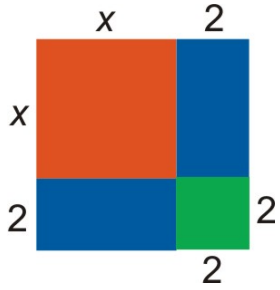


Podemos combinar estas formas como sigue



Obtenemos un cuadrado que no está completo.

Para poder completar el cuadrado, necesitamos un cuadrado de lado 2.



Obtenemos un cuadrado de lado $x+2$.

El área de este cuadrado es: $(x+2)^2$.

Puedes observar que la completación del cuadrado tiene una interpretación geométrica.

Finalmente, aquí tenemos el procedimiento algebraico para la completación del cuadrado.

$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= 0 \\ x^2+bx &= -c \\ x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2 &= -c+\left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 &= -c+\left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Solución de ecuaciones cuadráticas por completación del cuadrado

Demostremos el método de **completación del cuadrado** con un ejemplo.

Ejemplo 3

Resolver la siguiente ecuación cuadrática $x^2+12x=3$.

Solución

El método de completación de cuadrados es como se muestra a continuación.

1. Reescribir como $x^2+2(6)x=3$

2. Para poder tener un trinomio cuadrado perfecto al lado derecho necesitamos añadir la constante 6^2. Sumar esta constante a ambos lados de la ecuación.

$$x^2+2(6)(x)+6^2=3+6^2$$

3. Factorizar el trinomio cuadrado perfecto y simplificar el lado derecho de la ecuación.

$$(x+6)^2=39$$

4. Sacar la raíz cuadrada en ambos lados.

$$x+6=\sqrt{39} \quad \text{y} \quad x+6=-\sqrt{39}$$
$$x=-6+\sqrt{39}\approx 0.24 \quad \text{y} \quad x=-6-\sqrt{39}\approx -12.24$$

Respuesta $x=0.24$ y $x=-12.24$

Si el coeficiente del término x^2 no es uno, debemos dividir toda la expresión por este número antes de completar el cuadrado.

Ejemplo 4

Resolver la siguiente ecuación cuadrática $3x^2-10x=-1$.

Solución:

1. Dividir todos los términos por el coeficiente del término x^2.

$$x^2-\frac{10}{3}x=-\frac{1}{3}$$

2. Reescribir como

$$x^2-2\left(\frac{5}{3}\right)(x)=-\frac{1}{3}$$

3. Para poder tener un trinomio cuadrado perfecto en el lado derecho necesitamos añadir la constante $\left(\frac{5}{3}\right)^2$. Sumar esta constante a ambos lados de la ecuación.

$$x^2-2\left(\frac{5}{3}\right)(x)+\left(\frac{5}{3}\right)^2=-\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

4. Factorizar el trinomio cuadrado perfecto y simplificar.

$$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{25}{9}$$
$$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{22}{9}$$

5. Sacar la raíz cuadrada en ambos lados.

$$x-\frac{5}{3}=\sqrt{\frac{22}{9}} \quad \text{y} \quad x-\frac{5}{3}=-\sqrt{\frac{22}{9}}$$
$$x=\frac{5}{3}+\sqrt{\frac{22}{9}}\approx 3.23 \quad \text{y} \quad x=\frac{5}{3}-\sqrt{\frac{22}{9}}\approx 0.1$$

Respuesta $x=3.23$ y $x=0.1$

Resolver ecuaciones cuadráticas en forma estándar

Una ecuación en forma estándar se escribe como $ax^2+bx+c=0$. Para resolver una ecuación en esta forma primero movemos el término constante al lado derecho de la ecuación.

Ejemplo 5

Resolver la siguiente ecuación cuadrática $x^2+15x+12=0$.

Solución

El método de completación de cuadrados se aplica como sigue:

1. Mover la constante al otro lado de la ecuación.

$$x^2+15x=-12$$

2. Reescribir como

$$x^2+2\left(\frac{15}{2}\right)(x)=-12$$

3. Sumar la constante $\left(\frac{15}{2}\right)^2$ a ambos lados de la ecuación

$$x^2+2\left(\frac{15}{2}\right)(x)+\left(\frac{15}{2}\right)^2=-12+\left(\frac{15}{2}\right)^2$$

4. Factorizar el trinomio cuadrado perfecto y simplificar.

$$\left(x+\frac{15}{2}\right)^2=-12+\frac{225}{4}$$
$$\left(x+\frac{15}{2}\right)^2=\frac{177}{4}$$

5. Sacar la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación.

$$x+\frac{15}{2}=\sqrt{\frac{177}{4}} \quad \text{y} \quad x+\frac{15}{2}=-\sqrt{\frac{177}{4}}$$

$$x+-\frac{15}{2}+\sqrt{\frac{177}{4}}\approx -0.85 \quad \text{y} \quad x+-\frac{15}{2}+\sqrt{\frac{177}{4}}\approx -14.15$$

Respuesta $x=-0.85$ y $x=-14.15$

Graficación de funciones cuadráticas en la forma vértice

Probablemente una de las mejores aplicaciones del método de completación de cuadrados es reescribir una función cuadrática en la forma vértice.

La forma vértice de una función cuadrática es $y-k=a(x-h)^2$.

Esta forma es muy útil para graficar porque da el vértice de la parábola explícitamente. El vértice se encuentra en el punto (h,k).

También es simple encontrar los intersectos con el eje $x-$ de la forma vértice haciendo $y=0$ y sacando la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación resultante.

El intersecto con el eje $y-$ se puede encontrar haciendo $x=0$ y simplicando.

Ejemplo 6

Encontrar el vértice, los intersectos con el eje $x-$ y el intersecto con el eje $y-$ de las siguientes parábolas.

(a) $y-2=(x-1)^2$

(b) $y+8=2(x-3)^2$

Solución

a) $y-2=(x-1)^2$

El vértice es (1, 2)

Para encontrar los intersectos con el eje $x-$,

Hacer $y=0$	$-2=(x-1)^2$		
Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados	$\sqrt{-2}=x-1$	y	$-\sqrt{-2}=x-1$

Las soluciones no son reales (porque no se puede sacar la raíz cuadrada de un número negativo), por lo que **no** hay intersectos con el eje $x-$.

Para encontrar el intersecto con el eje $y-$,

Hacer $x=0$	$y-2=(-1)^2$
Simplificar	$y-2=1\Rightarrow y=3$

b) $y+8=2(x-3)^2$

Reescribir	$y-(-8)=2(x-3)^2$
El vÃ©rtice es	$(3,-8)$

Para encontrar los intersectos con el eje $x-$,

Hacer $y=0$:	$8=2(x-3)^2$		
Dividir ambos lados por 2.	$4=(x-3)^2$		
Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados :	$2=x-3$	y	$-2=x-3$
Simplificar :	$x=5$	y	$x=1$

Para encontrar el intersecto con el eje $y-$,

Hacer $x=0$.	$y+8=2(-3)^2$
Simplificar :	$y+8=18 \Rightarrow y=10$

Para graficar una parábola solo necesitamos la siguiente información.

- Las coordenadas del vértice.
- Los intersectos con el eje $x-$.
- El intersecto con el eje $y-$.
- Si la parábola está abierta hacia arriba o hacia abajo. Recuerda que si $a>0$, la parábola, está abierta hacia arriba; y si $a<0$, entonces la parábola está abierta hacia abajo.

Ejemplo 7

Graficar la parábola dada por la función $y+1=(x+3)^2$.

Solución

Reescribir.	$y-(-1)=(x-(-3))^2$
El vÃ©rtice es	$(-3,-1)$

Para encontrar los intersectos con el eje $x-$,

Hacer $y=0$	$1=(x+3)^2$		
Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados	$1=x+3$	y	$-1=x+3$
Simplificar	$x=-2$	y	$x=-4$

intersectos con el eje $x-$**:** (-2, 0) y (-4, 0)

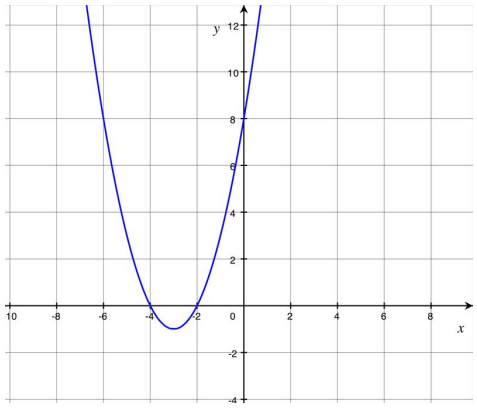
Para encontrar el intersecto con el eje $y-$,

Hacer $x=0$	$y+1(3)^2$	
Simplificar	$y=8$	$y-$ intersecto : $(0,8)$

Ya que $a>0$, la parábola está abierta **hacia arriba**.

Graficar todos los puntos y conectarlos con una curva suave.

1.4. Solución de ecuaciones cuadráticas por completación de cuadrados



Ejemplo 8

Graficar la parábola dada por la función $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2$

Solución:

Reescribir	$y-(0) = -\frac{1}{2}(x-2)^2$
El vÃ©rtice es	$(2,0)$

Para encontrar los intersectos con el eje $x-$,

Hacer y $= 0$.	$0 = -\frac{1}{2}(x-2)^2$
Multiplicar ambos lados por -2.	$0 = (x-2)^2$
Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados.	$0 = x-2$
Simplificar.	$x = 2$

intersecto en $x-$: (2, 0)

Nota: sólo hay un intersecto con el eje $x-$, lo cual indica que el vértice se encuentra en este punto (2,0).

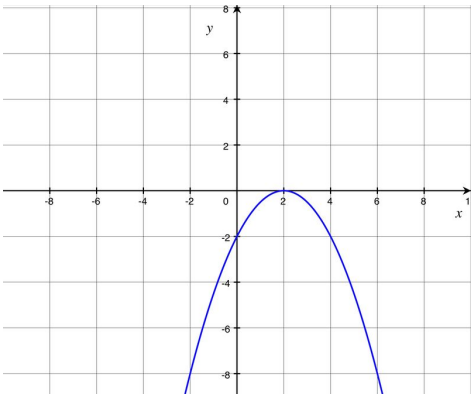
Para encontrar el intersecto con el eje $y-$,

Hacer $x = 0$	$y = -\frac{1}{2}(-2)^2$
Simplificar	$y = -\frac{1}{2}(4) \Rightarrow y = -2$

intersecto en $y-$: (0, -2)

Ya que $a < 0$, la parábola se **abre hacia abajo.**

Graficar todos los puntos y conectarlos con una curva suave.



Solución de problemas del mundo real usando funciones cuadráticas por completación de cuadrados

Movimiento de un proyectil con velocidad vertical

En la última sección aprendiste que un objeto que se suelta cae bajo la influencia de la gravedad. La ecuación para su altura con respecto al tiempo está dada por

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

El término y_0 representa la altura inicial del objeto y el coeficiente de gravedad sobre la tierra está dado por

$g = -9.8\ m/s^2$ o $g = -32\ pies/s^2$.

Por otro lado, si un objeto se lanza hacia arriba o hacia abajo en el aire tiene velocidad vertical inicial. Este término se representa comúnmente por la notación v_{0y}. Su valor es positivo si el objeto es lanzado hacia arriba en el aire y es negativo si el objeto es lanzada hacia abajo. La ecuación para la altura del objeto en este caso está dada por la expresión

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$$

Hay dos opciones para la ecuación que se usa en estos problemas.

$y = -4.9t^2 + v_{0y}t + y_0$	Si deseas tener la altura en metros.
$y = -16t^2 + v_{0y}t + y_0$	Si deseas tener la altura en pies.

Ejemplo 9

Una flecha es lanzada hacia arriba desde una altura de 2 metros con una velocidad de 50 m/s.

a) ¿Qué tan alto estará la flecha cuatro segundos después de ser lanzada? ¿Después de ocho segundos?

b) ¿En qué tiempo la flecha chocará contra el suelo?

c) ¿Cuál es la altura máxima que la flecha alcanzará y en que tiempo ocurrirá?

Solución

Ya que se nos da la velocidad en metros por segundo, usaremos la ecuación $y = -4.9t^2 + v_{oy}t + y_0$

Sabemos que $v_{oy} = 50\ m/s$ y $y_0 = 2$ metros, así que $y = -4.9t^2 + 50t + 2$

a) Para encontrar qué tan alto la flecha estará después de 4 segundos de ser lanzada, sustituimos 4 para t

$$\begin{aligned} y &= -4.9(4)^2 + 50(4) + 2 \\ &= -4.9(16) + 200 + 2 = 123.6\ metros \end{aligned}$$

—sustituimos— t = 8

$$\begin{aligned} y &= -4.9(8)^2 + 50(8) + 2 \\ &= -4.9(64) + 400 + 5 = 88.4\ metros \end{aligned}$$

b) La altura de la flecha sobre el suelo es $y = 0$, así que $0 = -4.9t^2 + 50t + 2$

Resolver para t por completaciÃ³n de cuadrados	$-4.9t^2 + 50t = -2$
Factorizar	$-4.9 - 4.9(t^2 - 10.2t) = -2$
Dividir ambos lados por	$-4.9t^2 - 10.2t = 0.41$
Sumar 5.1^2 en ambos lados	$t^2 - 2(5.1)t + (5.1)^2 = 0.41 + (5.1)^2$
Factorizar	$(t - 5.1)^2 = 26.43$
Resolver	$t - 5.1 \approx 5.14$ y $t - 5.1 \approx -5.14$
	$t \approx 10.2$ segundos y $t \approx -0.04$ segundos

c) Si graficamos la altura de la flecha con respecto al tiempo, obtendríamos una parábola abierta hacia abajo $(a < 0)$.

La altura máxima y el tiempo cuando esta ocurre es realmente el vértice de esta parábola (t, h).

Reescribir la ecuaciÃ³n en la forma vÃ©rtice.	$y = -4.9t^2 + 50t + 2$
	$y - 2 = -4.9t^2 + 50t$
	$y - 2 = -4.9(t^2 - 10.2t)$
Completar el cuadrado dentro del parÃ©ntesis.	$y - 2 - 4.9(5.1)^2 = -4.9(t^2 - 10.2t + (5.1)^2)$
	$y - 129.45 = -4.9(t - 5.1)^2$

El vértice es (5.1, 129.45). En otras palabras, **cuando** $t = 5.1$**segundos, la altura es** $y = 129$**metros.**

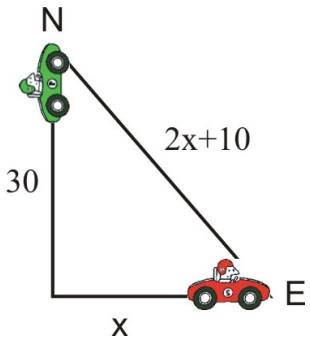
Otro tipo de problema de aplicación que se puede resolver usando ecuaciones cuadráticas es cuando dos objetos se alejan en direcciones perpendiculares uno del otro. A continuación se muestra un ejemplo de este tipo de problemas.

Ejemplo 10

Dos carros dejan una intersección. Un carro viaja hacia el norte y el otro viaja hacia el este. Cuando el carro que viaja hacia el norte lleva recorridas 30 millas, la distancia entre los carros fue 10 millas más que el doble de la distancia recorrida por el carro que viaja hacia el este. Encontrar la distancia entre los carros en ese momento.

Solución

Sea $x =$ la distancia recorrida por el carro que viaja hacia el este.



$2x + 10 =$ la distancia entre los dos carros.

Construyamos un bosquejo.

Podemos usar el teorema de Pitágoras $(a^2 + b^2 = c^2)$ para encontrar una ecuación para x:

$$x^2 + 30^2 = (2x + 10)^2$$

Expandir el paréntesis y simplificar.

$$x^2 + 900 = 4x^2 + 40x + 100$$
$$800 = 3x^2 + 40x$$

Resolver por completación de cuadrados.

$$\frac{800}{3} = x^2 + \frac{40}{3}x$$
$$\frac{800}{3} + \left(\frac{20}{3}\right)^4 = x^2 + 2\left(\frac{20}{3}\right)x + \left(\frac{20}{3}\right)^3$$
$$\frac{2800}{9} = \left(x + \frac{20}{3}\right)^2$$
$$x + \frac{20}{3} \approx 17.6 \text{ and } x + \frac{20}{3} \approx -17.6$$
$$x \approx 11 \text{ y } x \approx -24.3$$

Ya que solo distancias positivas tienen sentido en este caso, la distancia entre los dos carros es $2(11) + 10 = 32$ *millas*.

Respuesta La distancia entre los dos carros es 32 millas.

Preguntas de repaso

Completa el cuadrado en cada expresión.

1. $x^2 + 5x$
2. $x^2 - 2x$
3. $x^2 + 3x$

4. $x^2 - 4x$
5. $3x^2 + 18x$
6. $2x^2 - 22x$
7. $8x^2 - 10x$
8. $5x^2 + 12x$

Resuelve cada ecuación cuadrática por completación de cuadrados.

9. $x^2 - 4x = 5$
10. $x^2 - 5x = 10$
11. $x^2 + 10x + 15 = 0$
12. $x^2 + 15x + 20 = 0$
13. $2x^2 - 18x = 0$
14. $4x^2 + 5x = -1$
15. $10x^2 - 30x - 8 = 0$
16. $5x^2 + 15x - 40 = 0$

Reescribe cada función cuadrática en la forma vértice.

17. $y = x^2 - 6x$
18. $y + 1 = -2x^2 - x$
19. $y = 9x^2 + 3x - 10$
20. $y = 32x^2 + 60x + 10$

Para cada parábola, encuentra:

(a) El vértice

(b) Los intersectos con el eje $x-$.

(c) El intersecto con el eje $y-$.

(d) Si está abierta hacia arriba o hacia abajo.

(e) La gráfica de la parábola.

21. $y - 4 = x^2 + 8x$
22. $y = -4x^2 + 20x - 24$
23. $y = 3x^2 + 15x$
24. $y + 6 = -x^2 + x$
25. Sam lanza un huevo hacia abajo desde una altura de 25 pies. La velocidad inicial del huevo es 16 pies/segundo. ¿Cuánto tiempo le lleva al huevo chocar contra el suelo?
26. Amanda y Dolvin dejan sus casas al mismo tiempo. Media hora después se encuentran a una distancia de 5.5 millas uno del otro y Dolvin ha recorrido tres millas más que la distancia que Amanda ha recorrido. ¿Cuán lejos caminó Amanda y cuán lejos anduvo en bicicleta Dolvin?

Respuestas a las preguntas de repaso

1. $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$
2. $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$
3. $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$
4. $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

5. $3(x^2+6x+9)=3(x+3)^2$
6. $2\left(x^2-11x+\frac{121}{4}\right)=2\left(x-\frac{11}{2}\right)^2$
7. $8\left(x^2-\frac{5}{4}x+\frac{25}{64}\right)=8\left(x-\frac{5}{8}\right)^2$
8. $5\left(x^2+\frac{12}{5}x+\frac{36}{25}\right)=5\left(x+\frac{6}{5}\right)^2$
9. 5, -1
10. 6.53, -1.53
11. -8.16, -1.84
12. -13.52, -1.48
13. 9.16, -.16
14. -1, -.25
15. -3.25, -.25
16. -4.7, 1.7
17. $y+9=(x-3)^2$
18. $y+\frac{7}{8}=-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2$
19. $y+10.25=9\left(x+\frac{1}{6}\right)^2$
20. $y-\frac{305}{8}=-32\left(x-\frac{15}{16}\right)^2$
21. $y+12=(x+4)^2$; vértice (-4,-12); intersectos con el eje $x-$: (-7.46, 0), (-.54, 0); intersecto con el eje $y-$: (0, 4); abierta hacia arriba.
22. $y-1=-4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$; vértice (2.5, 1); intersectos con el eje $x-$: (2, 0), (3, 0) intersecto con el eje $y-$: (0, -24); abierta hacia abajo.
23. $y+18.75=3(x+2.5)^2$; vértice (-2.5,-18.75); intersectos con el eje $x-$: (0, 0), (-5, 0); intersecto con el eje $y-$: (0, 0); abierta hacia arriba.
24. $y+\frac{23}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; vértice (0.5,-5.75); no hay intersectos con el eje $x-$; intersecto con el eje $y-$: (0, -6); abierta hacia abajo.
25. 0.85 segundos
26. Amanda 2.1 millas, Dolvin 5.1 millas

1.5 Solución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática

Objetivos de aprendizaje

- Resolver ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática.
- Identificar y escoger métodos para resolver ecuaciones cuadráticas.
- Resolver problemas del mundo real usando funciones cuadráticas por completación de cuadrados.

Introducción

En esta sección, resolverás ecuaciones cuadráticas usando la **fórmula cuadrática.** Muchos ya están familiarizados con esta fórmula, ya que se ha usado en otros cursos de matemática. Este es probablemente el método más usado para resolver ecuaciones cuadráticas. Para una ecuación cuadrática en forma estándar

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Las soluciones se encuentran usando la siguiente fórmula.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Empezaremos explicando de dónde proviene esta fórmula y luego mostraremos cómo se aplica. Esta fórmula se deriva resolviendo una ecuación cuadrática general usando el método de completación de cuadrados que aprendiste en la sección previa.

Empezamos con una ecuaciÃ³n cuadrÃ¡tica general.	$ax^2+bx+c=0$
Restamos el tÃ©rmino constante en ambos lados.	$ax^2+bx=-c$
Dividimos por el coeficiente del tÃ©rmino x^2 .	$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
Reescribimos.	$x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x=-\frac{c}{a}$
Sumar la constante $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos lados.	$x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$
Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto.	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}$
Simplificar.	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$
Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados.	$x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ y $x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$
Simplificar.	$x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$ y $x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$
	$x=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$
	$x=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$
	$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
	$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Esto puede ser escrito de forma más compacta como $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Puedes ver que la fórmula familiar proviene directamente de aplicar el método de completación de cuadrados. Aplicar el método de completación de cuadrados para resolver una ecuación cuadrática puede ser tedioso. La fórmula cuadrática es una forma más directa de encontrar las soluciones.

Solución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática

Aplicar la fórmula cuadrática es básicamente sustituir los valores de a, b y c en la fórmula cuadrática.

Ejemplo 1

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática.

a) $2x^2+3x+1=0$

b) $x^2-6x+5=0$

c) $-4x^2+x+1=0$

Solución

Empezar con la fórmula cuadrática y sustituir los valores de a, b y c.

a)

FÃ³rmula cuadrÃ¡tica	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
sustituir los valores $a = 2, b = 3, c = 1$.	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$
simplificar.	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4}$
Separar las dos opciones.	$x = \frac{-3+1}{4}$ y $x = \frac{-3-1}{4}$
Resolver.	$x = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{-4}{4} = -1$

Respuesta $x = -\frac{1}{2}$ y $x = -1$

b)

FÃ³rmula cuadrÃ¡tica.	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Sustituir los valores $a = 1, b = -6, c = 5$.	$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$
Simplificar.	$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$
Separar las dos opciones.	$x = \frac{6+4}{2}$ y $x = \frac{6-4}{2}$
Resolver	$x = \frac{10}{2} = 5$ y $x = \frac{2}{2} = 1$

Respuesta $x = 5$ y $x = 1$

c)

FÃ³rmula cuadrÃ¡tica.	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Sustituir los valores $a = -4, b = 1, c = 1$.	$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(-4)(1)}}{2(-4)}$
Simplificar.	$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{-8} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{-8}$
Separar las dos opciones.	$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{-8}$ y $x = \frac{-1-\sqrt{17}}{-8}$
Resolver.	$x \approx -.39$ y $x \approx .64$

Respuesta $x \approx -.39$ y $x \approx .64$

Seguido, cuando se sustituyen los valores de los coeficientes en la fórmula cuadrática, obtenemos un número negativo dentro de la raíz cuadrada. Ya que la raíz cuadrada de números negativos no da respuestas reales, decimos que la ecuación no tiene soluciones reales. En clases más avanzadas de matemática, aprenderás cómo trabajar con soluciones "complejas" (o "imaginarias") para ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 2

Resolver la siguiente ecuación cuadrática usando la fórmula cuadrática $x^2 + 2x + 7 = 0$

Solución:

a)

FÃ³rmula cuadrÃ¡tica.	$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Sustituir los valores $a = 1, b = 2, c = 7$.	$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)}$
Simplificar.	$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 28}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-24}}{2}$

Respuesta No hay soluciones reales.

Para poder aplicar la fórmula cuadrática, debemos estar seguros que la ecuación está escrita en la forma estándar. Para algunos ejemplos debemos reescribir la ecuación antes de aplicar la fórmula cuadrática.

Ejemplo 3

Resolver la siguiente ecuación cuadrática usando la fórmula cuadrática.

a) $x^2 - 6x = 10$

b) $8x^2 = 5x + 6$

Solución:

a)

Reescribir la ecuaciÃ³n en la forma estÃ¡ndar.	$x^2 - 6x - 10 = 0$
FÃ³rmula cuadrÃ¡tica	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Sustituir los valores $a = 1, b = -6, c = -10$.	$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)}$
Simplificar.	$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{76}}{2}$
Separar las dos opciones.	$x = \frac{6 + \sqrt{76}}{2}$ y $x = \frac{6 - \sqrt{76}}{2}$
Resolver.	$x \approx 7.36$ y $x \approx -1.36$

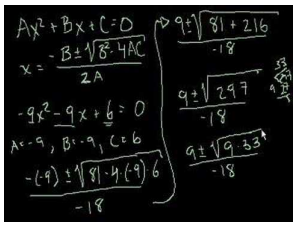
Respuesta $x \approx 7.36$ y $x \approx -1.36$

b)

Reescribir la ecuaciÃ³n en la forma estÃ¡ndar.	$8x^2 + 5x + 6 = 0$
FÃ³rmula cuadrÃ¡tica	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Sustituir los valores $a = 8, b = 5, c = 6$.	$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(8)(6)}}{2(8)}$
Simplificar.	$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 192}}{16} = \frac{-5 \pm \sqrt{-167}}{16}$

Respuesta no hay soluciones reales.

Enlace multimedia Para más ejemplos sobre solución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática, ver http://www.youtube.com/watch?v=y19jYxzY8Y8 (9:14)



MEDIA

Click image to the left for more content.

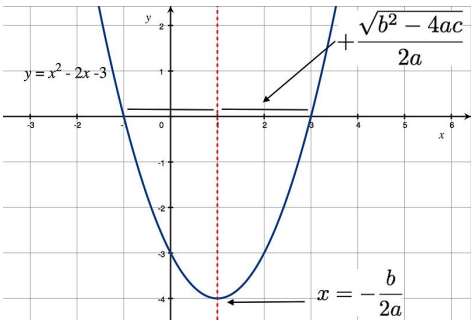
. Este video no necesariamente es diferente a los ejemplos de arriba, pero ayuda a reforzar el procedimiento para usar la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones.

Búsqueda del vértice de una parábola con la fórmula cuadrática

Algunas veces obtienes más información de una fórmula de lo que originalmente andabas buscando. Es este caso, la fórmula cuadrática también nos da una forma fácil para localizar el vórtice de la parábola.

Primeramente, recordando que la fórmula cuadrática nos dice cuáles son las **raíces** o **soluciones** de la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Estas raíces son

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$



Podemos reescribir la fracción en la fórmula cuadrática como

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Recordando que las raíces son **simétricas** con respecto al vértice. En la forma de arriba, podemos ver que las raíces de una ecuación cuadrática son simétricas con respecto a la coordenada $x--\frac{b}{2a}$ porque se mueven $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ unidades al izquierda y la derecha (debido al signo $\pm$) de la línea vertical $x=-\frac{b}{2a}$. La imagen de la derecha ilustra esto para la ecuación $x^2-2x-3=0$. Ambas, las raíces, -1 y 3 se encuentran a 2 unidades de la línea vertical $x=1$.

Identificar y seleccionar métodos para resolver ecuaciones cuadráticas

En matemática, aprenderás a resolver ecuaciones cuadráticas que describen problemas de aplicación o que son parte de problemas más complicados. Has aprendido cuatro formas de resolver una ecuación cuadrática.

- Factorización.
- Sacando la raíz cuadrada.
- Completando el cuadrado.
- Fórmula cuadrática.

Comúnmente, no se te dirá cual método usar. Tendrás que tomar la decisión tu mismo. Sin embargo, a continuación se presentan algunas indicaciones de cuáles métodos son mejores en diferentes situaciones.

Factorización es siempre mejor si la expresión cuadrática se puede factorizar con facilidad. Siempre es ganancioso revisar si puedes factorizar porque este es el método más rápido. Muchas expresiones no se pueden factorizar, por lo que este método no se usa frecuentemente en la práctica.

Sacando la raíz cuadrada se usa mejor cuando no existe el término que contiene la x en la ecuación.

Completando el cuadrado puede ser usado para resolver cualquier ecuación cuadrática. Usualmente, no es mucho mejor que usar la fórmula cuadrática (en términos de cálculos difíciles), sin embargo, es un método muy importante para reescribir una función cuadrática en la forma vértice. También se usa para reescribir ecuaciones de círculos, elipses e hipérbolas en forma estándar (algo que harás en álgebra II, trigonometría, física, cálculo y otras disciplinas).

Fórmula cuadrática es el método que más se usa para resolver una ecuación cuadrática. Cuando resolver directamente sacando raíz y factorizando no funciona, este es el método que la mayoría de las personas prefieren usar.

Si usas factorización o la fórmula cuadrática asegúrate que la ecuación se encuentra en forma estándar.

Ejemplo 4

Resolver cada ecuación cuadrática

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$

b) $x^2 = 8$

c) $-4x^2 + x = 2$

d) $25x^2 - 9 = 0$

e) $3x^2 = 8x$

Solución

a) Esta expresión puede ser factorizada fácilmente, así que podemos factorizar y aplicar la propiedad del producto cero:

Fatorizar.	$(x-5)(x+1) = 0$
Aplicar la propiedad del producto cero.	$x-5 = 0$ y $x+1 = 0$
Resolver.	$x = 5$ y $x = -1$

Respuesta $x = 5$ y $x = -1$

b) Ya que la expresión no contiene el término x podemos sacar la raíz cuadrada:

Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados.	$x = \sqrt{8}$ y $x = -\sqrt{8}$

Respuesta $x = 2.83$ y $x = -2.83$

c) Reescribir la ecuación en la forma estándar.

De primera instancia no pareciese que la expresión puede ser factorizada, así que usaremos la fórmula cuadrática.

FÃ³rmula cuadrÃ¡tica	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Sustituir los valores $a = -4, b = 1, c = -2$.	$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-4)(-2)}}{2(-4)}$
Simplificar.	$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 32}}{-8} = \frac{-1 \pm \sqrt{-31}}{-8}$

Respuesta no existen soluciones reales.

d) Este problema puede ser resuelto fácilmente factorizando o sacando la raíz cuadrada. Usemos la raíz cuadrada en este caso.

Sumar 9 en ambos lados de la ecuaciÃ³n.	$25x^2 = 9$
Dividir a ambos lados por 25.	$x^2 = \frac{9}{25}$
Sacar la raÃz cuadrada en ambos lados.	$x = \sqrt{\frac{9}{25}}$ y $x = -\sqrt{\frac{9}{25}}$
Simplificar.	$x = \frac{3}{5}$ y $x = -\frac{3}{5}$

Respuesta $x = \frac{3}{5}$ y $x = -\frac{3}{5}$

e)

Reescribir la ecuaciÃ³n en la forma estÃ¡ndar	$3x^2 - 8x = 0$
Factorizar el tÃ©rmino comÃºn x.	$x(3x - 8) = 0$
Hacer ambos tÃ©rminos iguales a cero.	$x = 0$ y $3x = 8$
Resolver.	$x = 0$ y $x = \frac{8}{3} = 2.67$

Respuesta $x = 0$ y $x = 2.67$

Solución de problemas del mundo real usando funciones cuadráticas por cualquier método

A continuación se presentan algunos problemas de aplicación que surgen de relaciones numéricas y aplicaciones en geometría.

Ejemplo 5

El producto de dos números enteros positivos es 156. Encontrar los enteros.

Solución

Para dos enteros consecutivos, un entero es uno más que el otro.

Definir

Sea $x =$ el entero pequeño

$x + 1 =$ el siguiente entero

Traducir

El producto de dos números es 156. Podemos escribir la ecuación:

$$x(x+1) = 156$$

Resolver

$$x^2 + x = 156$$
$$x^2 + x - 156 = 0$$

Aplicar la fórmula cuadrática con $a = 1, b = 1, c = -156$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-156)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{-1 \pm 25}{2}$$
$$x = \frac{-1+25}{2} \text{ y } x = \frac{-1-25}{2}$$
$$x = \frac{24}{2} = 12 \text{ y } x = \frac{-26}{2} = -13$$

Ya que estamos buscando enteros positivos, tomamos $x = 12$

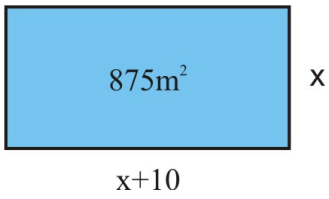
Respuesta 12 y 13

Revisar $12 \times 13 = 156$. La respuesta es correcta.

Ejemplo 6

La longitud de una piscina rectangular es 10 metros más que su ancho. El área de la piscina es 875 metros cuadrados. Encontrar las dimensiones de la piscina.

Solución:



Dibujar un bosquejo

Definir

Sea $x =$ el ancho de la piscina

$x + 10 =$ la longitud de la piscina

Traducir

El área de un rectángulo es A = longitud $\times$ ancho, así que

$$x(x+10) = 875$$

Resolver

$$x^2 + 10x = 875$$
$$x^2 + 10x - 875 = 0$$

Aplicar la fórmula cuadrática con $a = 1, b = 10$ y $c = -875$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(1)(-875)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 3500}}{2}$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{3600}}{2} = \frac{-10 \pm 60}{2}$$
$$x = \frac{-10 + 60}{2} \text{ and } x = \frac{-10 - 60}{2}$$
$$x = \frac{50}{2} = 25 \text{ and } x = \frac{-70}{2} = -35$$

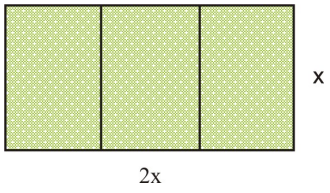
Ya que las dimensiones de la piscina deben ser positivas, entonces $x = 25$ metros.

Respuesta La piscina es de 25 *metros* $\times$ 35 *metros*.

Revisar $25 \times 35 = 875\ m^2$. **La respuesta es correcta.**

Ejemplo 7

Suzie quiere construir un jardín que tenga secciones rectangulares separadas. Ella quiere cercar alrededor de todo el jardín y entre cada sección como se muestra. El dibujo muestra que el jardín es dos veces más largo que el ancho y el área total es 200 $pies^2$. *¿Cuánta cerca necesita Suzie?*



Solución

Dibujar un bosquejo

Definir

Sea $x =$ el ancho del dibujo

$2x =$ la longitud del dibujo

Traducir

El área de un rectángulo es A = longitud $\times$ ancho, así que

$$x(2x) = 200$$

Resolver

$$2x^2 = 200$$

Resolver sacando la raíz cuadrada.

$$x^2 = 100$$
$$x = \sqrt{100} \text{ y } x = -\sqrt{100}$$
$$x = 10 \text{ y } x = -10$$

Tomamos $x = 10$, ya que solamente dimensiones positivas tienen sentido.

El dibujo de la tierra es 10 *pies* $\times$ 20 *pies*.

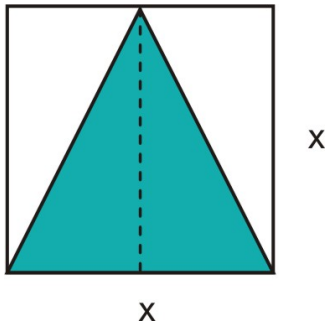
Para cercar el jardín de la forma que Suzie quiere, necesitamos 2 longitudes y 4 anchos $= 2(20) + 4(10) = 80$ pies de cerca.

Respuesta: La cerca tiene 80 pies.

Revisar $10 \times 20 = 200$ pies^2 y $2(20) + 4(10) = 80$ pies. **La respuesta es correcta.**

Ejemplo 8

Un triángulo isósceles está encerrado por un cuadrado de tal forma que su base coincide con uno de los lados del cuadrado y la punta del tríangulo toca el lado opuesto del cuadrado. Si el área del triángulo es 20 pulgadas^2, *¿cuál es el área del cuadrado?*



Solución:

Dibujar un bosquejo.

Definir

Sea $x =$ la base del triángulo

$x =$ la altura del triángulo

Traducir

El área de un triángulo es $\frac{1}{2} \times$ base $\times$ altura, así que

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot x = 20$$

Resolver

$$\frac{1}{2}x^2 = 20$$

Resolver sacando la raíz cuadrada.

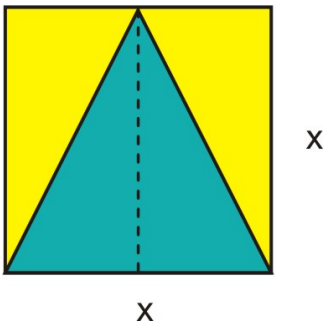
$$x^2 = 40$$
$$x = \sqrt{40} \text{ y } x = -\sqrt{40}$$
$$x \approx 6.32 \text{ y } x \approx -6.32$$

El lado del cuadrado es 6.32 pulgadas.

El área del cuadrado es $(6.32)^2 = 40$ pulgadas^2, dos veces tan grande como el área del triángulo.

Respuesta: El área del triángulo es 40 pulgadas^2

Revisar: Hace sentido que el área del cuadrado sea dos veces el área del tríangulo. Si observas la figura podrás ver que puedes hacer que quepan dos triángulos dentro del cuadrado.



La respuesta es correcta.

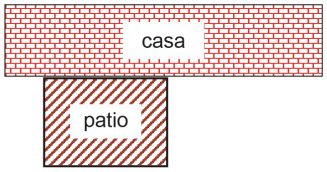
Ejercicios de repaso

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática.

1. $x^2 + 4x - 21 = 0$
2. $x^2 - 6x = 12$
3. $3x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{8}$
4. $2x^2 + x - 3 = 0$
5. $-x^2 - 7x + 12 = 0$
6. $-3x^2 + 5x = 0$
7. $4x^2 = 0$
8. $x^2 + 2x + 6 = 0$

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando el método que tú elijas.

9. $x^2 - x = 6$
10. $x^2 - 12 = 0$
11. $-2x^2 + 5x - 3 = 0$
12. $x^2 + 7x - 18 = 0$
13. $3x^2 + 6x = -10$
14. $-4x^2 + 4000x = 0$
15. $-3x^2 + 12x + 1 = 0$
16. $x^2 + 6x + 9 = 0$
17. $81x^2 + 1 = 0$
18. $-4x^2 + 4x = 9$
19. $36x^2 - 21 = 0$
20. $x^2 - 2x - 3 = 0$
21. El producto de dos enteros positivos consecutivos es 72. Encontrar los dos números.
22. El producto de dos enteros impares consecutivos es 1 menos que 3 veces su suma. Encontrar los enteros.
23. La longitud de un rectángulo excede su ancho por 3 pulgadas. El área del rectángulo es 70 pulgadas cuadradas, encontrar sus dimensiones.
24. Ángel quiere cortar una pieza cuadrada de la esquina de una pieza rectangular de plywood. La pieza más larga de madera es 4 *pies* $\times$ 8 *pies* y la parte cortada es $\frac{1}{3}$ del área total de la hoja de plywood. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?



25. Mike quiere cercar tres lados de un patio rectangular que se encuentra adyacente a la parte de atrás de su casa. El área del patio es 192 $pies^2$ y la longitud es 4 pies más larga que el ancho. Encontrar cuánta cerca necesitará Mike.

Respuestas a los ejercicios de repaso

1. $x = -7, x = 3$
2. $x = -1.58, x = 7.58$
3. $x = -.28, x = .45$
4. $x = -1.5, x = 1$
5. $x = -8.42, x = 1.42$
6. $x = 1, x = \frac{2}{3}$
7. $x = 0, x = \frac{1}{4}$
8. No tiene soluciones reales
9. $x = -2, x = 3$
10. $x = -3.46, x = 3.46$
11. $x = 1, x = 1.5$
12. $x = -9, x = 2$
13. No tiene soluciones reales
14. $x = 0, x = 1000$
15. $x = -.08, x = 4.08$
16. $x = -3$

17. No tiene soluciones reales
18. No tiene soluciones reales
19. $x = -.76, x = .76$
20. $x = -1, x = 3$
21. 8 y 9
22. 5 y 7
23. 7 pulgadas y 10 pulgadas
24. lado $= 3.27$ pies
25. 40 pies de cerca.

1.6 El discriminante

Objetivos de aprendizaje

- Encontrar el discriminante de una ecuación cuadrática.
- Interpretar el discriminante de una ecuación cuadrática.
- Resolver problemas del mundo real usando funciones cuadráticas e interpretando el discriminante.

Introducción

La ecuación cuadrática es $ax^2+bx+c=0$.

Puede ser resuelta usando la fórmula cuadrática $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

La expresión dentro de la raíz cuadrada es llamada el **discriminante**, $D=b^2-4\text{ac}$. El discriminante puede ser usado para analizar los tipos de soluciones de una ecuación cuadrática sin necesidad de resolver la ecuación. A continuación se presentan algunas guías.

- Si $b^2-4ac>0$, obtenemos dos soluciones reales distintas.
- Si $b^2-4ac<0$, obtenemos soluciones no reales.
- Si $b^2-4ac=0$, obtenemos una solución real, una **raíz doble.**

Cálculo del discriminante de una ecuación cuadrática

Para encontrar el discriminante de una ecuación cuadrática calculamos $D=b^2-4ac$.

Ejemplo 1

Encontrar el discriminante de cada ecuación cuadrática. Luego establece cuantas soluciones tendrá la ecuación cuadrática sin resolverla.

a) $x^2-5x+3=0$

b) $4x^2-4x+1=0$

c) $-2x^2+x=4$

Solución:

a) Sustituir $a=1,b=-5$ y $c=3$ en la fórmula del discriminante $D=(-5)^2-4(1)(3)=13$.

Hay dos soluciones reales porque $D>0$.

b) Sustituir $a=4,b=-4$ y $c=1$ en la fórmula del discriminante $D=(-4)^2-4(4)(1)=0$.

Hay una solución real porque $D=0$.

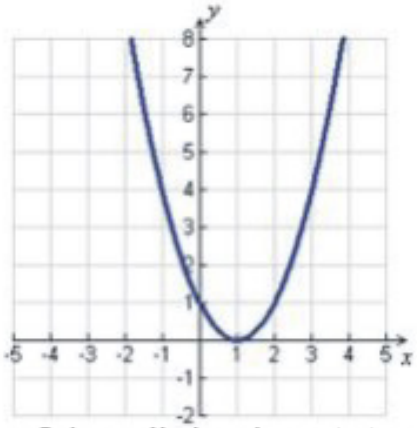
c) Reescribir la ecuación en forma estándar $-2x^2+x-4=0$.

Sustituir $a = -2, b = 1$ y $c = -4$ en la fórmula del discriminante $D = (1)^2 - 4(-2)(-4) = -31$.

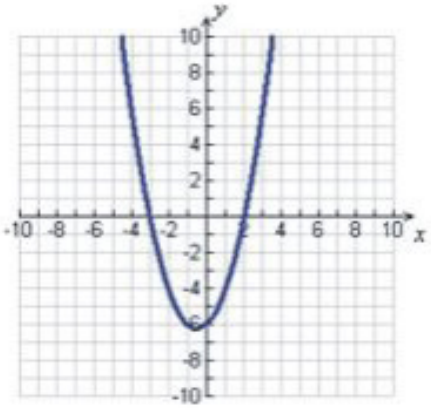
No existen soluciones reales porque $D < 0$.

Interpretación del discriminante de una ecuación cuadrática

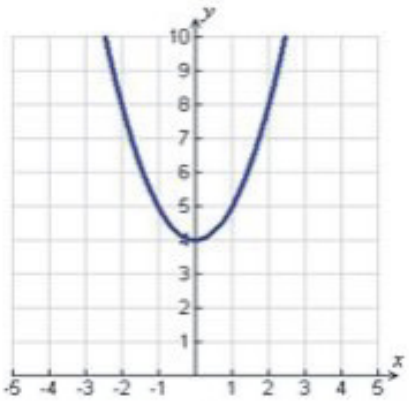
El signo del discriminante nos dice la naturaleza de las soluciones (o raíces) de una ecuación cuadrática. Podemos obtener dos soluciones reales distintas si $D > 0$, soluciones no reales si $D < 0$ o una solución (llamada una "raíz doble") si $D = 0$. Hacer memoria que el número de soluciones de una ecuación cuadrática nos dice cuantas veces una parábola intercepta el eje $x-$.



D = 0, la parábola solamente toca el eje x en un lugar.



D > 0, la parábola cruza el eje x en dos lugares.



D < 0, la parábola no cruza el eje x.

Ejemplo 2

Determina la naturaleza de las soluciones de cada ecuación cuadrática.

a) $4x^2 - 1 = 0$

b) $10x^2 - 3x = -4$

c) $x^2 - 10x + 25 = 0$

Solución

Usar el discriminante para determinar la naturaleza de las soluciones para la ecuación cuadrática.

a) Sustituir $a = 4, b = 0$ y $c = -1$ en la fórmula del discriminante $D = (0)^2 - 4(4)(-1) = 16$.

El discriminante es positivo, así que la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Las soluciones para la ecuación son: $\frac{0 \pm \sqrt{16}}{8} = \pm\frac{4}{8} = \pm\frac{1}{2}$.

b) Reescribir la ecuación en forma estándar $10x^2 - 3x + 4 = 0$.

Sustituir $a = 10, b = -3$ y $c = 4$ en la fórmula del discriminante $D = (-3)^2 - 4(10)(4) = -151$.

El discriminante es negativo, así que la ecuación tiene dos soluciones no reales.

c) Sustituir $a = 1, b = -10$ y $c = 25$ en la fórmula del discriminante $D = (-10)^2 - 4(1)(25) = 0$.

El discriminante es 0, así que la ecuación tiene una doble raíz.

La solución para la ecuación es $\frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Si el discriminante es un cuadrado perfecto, entonces las soluciones para la ecuación son números racionales.

Ejemplo 3

Determina la naturaleza de las soluciones de cada ecuación cuadrática.

a) $2x^2 + x - 3 = 0$

b) $-x^2 - 5x + 14 = 0$

Solución

Usar el discriminante para determinar la naturaleza de las soluciones.

a) Sustituir $a = 2, b = 1$ y $c = -3$ en la fórmula del discriminante $D = (1)^2 - 4(2)(-3) = 25$.

El discriminante es un cuadrado perfecto positivo, por lo que las soluciones son dos números reales racionales.

Las soluciones para la ecuación son $\frac{-1\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-1\pm5}{4}$, así que $x=1$ and $x=-\frac{3}{2}$.

b) Sustituir $a=-1, b=-5$ y $c=14$ en la fórmula del discriminante $D=(-5)^2-4(-1)(14)=81$.

El discriminante es un cuadrado perfecto positivo, así que las soluciones son dos números reales racionales.

Las soluciones para la ecuación son $\frac{5\pm\sqrt{81}}{-2}=\frac{5\pm9}{-2}$, por lo que $x=-7$ y $x=2$.

Si el discriminante no es un cuadrado perfecto, entonces las soluciones para la ecuación son números irracionales.

Ejemplo 4

Determina la naturaleza de las soluciones para cada ecuación cuadrática.

a) $-3x^2+4x+1=0$

b) $5x^2-x-1=0$

Solución

Usar el discriminante para determinar la naturaleza de las soluciones.

a) Sustituir $a=-3, b=2$ y $c=1$ en la fórmula del discriminante $D=(4)^2-4(-3)(1)=28$.

El discriminante no es un cuadrado perfecto positivo, así que las soluciones son dos números reales irracionales.

Las soluciones para la ecuación son $\frac{-2\pm\sqrt{28}}{-6}$, así que $x\approx-0.55$ y $x\approx1.22$.

b) Sustituir $a=5, b=-1$ y $c=-1$ en la fórmula del discriminante $D=(-1)^2-4(5)(-1)=21$.

El discriminante no es un cuadrado perfecto positivo, así que las soluciones son dos números reales irracionales.

Las soluciones para la ecuación son $\frac{1\pm\sqrt{20}}{10}$, así que $x\approx0.56$ y $x\approx-0.36$.

Solución de problemas del mundo real usando funciones cuadráticas e interpretando el discriminante

Vimos que el cálculo del discriminante muestra qué tipos de soluciones posee una ecuación cuadrática. Conocer los tipos de soluciones es muy importante en problemas de aplicación.

Ejemplo 5

Marcus patea una pelota para conseguir un gol de campo. La altura de la pelota está dada por la ecuación $y=-\frac{32}{6400}x^2+x$ en donde y es la altura y x es la distancia horizontal que la pelota viaja. Queremos conocer si Marcus pateó la pelota lo suficientemente fuerte para que esta pasara sobre el poste de gol que se encuentra a 10 pies de altura.

Solución

Definir

Sea $y=$ la altura de la pelota en pies

$x=$ la distancia desde la pelota hasta el poste de gol.

Traducir Queremos conocer si es posible que la altura de la pelota sea igual a 10 pies a una distancia real desde el poste de gol.

$$10=-\frac{32}{6400}x^2+x$$

Resolver

Escribir la ecuaciÃ³n en forma estÃ¡ndar.	$-\frac{32}{6400}x^2+x-10=0$
Simplificar.	$-0.005x^2+x-10=0$
Calcular el discriminante.	$D=(1)^2-4(-0.005)(-10)=0.8$

Ya que el discriminante es positivo, sabemos que es posible que la pelota pase sobre el poste de gol si Marcus la patea desde una distancia aceptable x desde el poste de gol. ¿Desde qué distancia puede él marcar un gol de campo? Ver el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 (continuación)

¿Cuál es la máxima distancia desde el poste de gol que él puede patear la pelota y hacer que esta pase sobre el poste de gol?

Solución

Necesitamos resolver para el valor de x usando la fórmula cuadrática.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{0.8}}{-0.01}\approx 10.6 \text{ Ã}^3 \text{ } 189.4$$

Esto significa que Marcus tiene que estar cerca de 189.4 pies o más lejos de 10.6 pies para anotar un gol. (¿Por qué hay dos soluciones para esta ecuación? Piensa acerca de la trayectoria de la pelota después que él la patea).

Ejemplo 7

Emma y Bradon tienen una fábrica que produce cascos para bicicletas. Su contador dice que sus ganancias por año están dadas por la función

$$P=0.003x^2+12x+27760$$

En esta ecuación x es el número de cascos producidos. Su meta es obtener ganancias de $40,000 este año. ¿Es esto posible?

Solución

Queremos saber si es posible que las ganancias sean iguales a $40,000.

$$40000=-0.003x^2+12x+27760$$

Resolver

Escribir la ecuaciÃ³n en forma estÃ¡ndar	$-0.003x^2+12x-12240=0$
Calcular el discriminante.	$D=(12)^2-4(-0.003)(-12240)=-2.88$

Ya que el discriminante es negativo, sabemos que no hay soluciones reales para esta ecuación. Por consiguiente, no es posible para Emma y Bradon obtener ganancias de $40,000 este año sin importar cuántos cascos produzcan.

Ejercicios de repaso

Calcular el discriminante para cada ecuación cuadrática.

1. $2x^2 - 4x + 5 = 0$
2. $x^2 - 5x = 8$
3. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
4. $x^2 + 3x + 2 = 0$
5. $x^2 - 16x = 32$
6. $-5x^2 + 5x - 6 = 0$

Determinar la naturaleza de las soluciones para cada ecuación cuadrática.

7. $-x^2 + 3x - 6 = 0$
8. $5x^2 = 6x$
9. $41x^2 - 31x - 52 = 0$
10. $x^2 - 8x + 16 = 0$
11. $-x^2 + 3x - 10 = 0$
12. $x^2 - 64 = 0$

Sin resolver la ecuación, determina si las soluciones serán racionales o irracionales.

13. $x^2 = -4x + 20$
14. $x^2 + 2x - 3 = 0$
15. $3x^2 - 11x = 10$
16. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{3} = 0$
17. $x^2 - 10x + 25 = 0$
18. $x^2 = 5x$
19. Marty se encuentra fuera del edificio donde se localiza su apartamento. Necesita darle a Yolanda su teléfono celular pero no tiene tiempo para subir por las escaleras al tercer piso para dárselo. Él lo lanza verticalmente con una velocidad de 55 pies/segundo. ¿Llegará el teléfono donde ella si se encuentra 36 pies arriba? (Ayuda: la ecuación para la altura está dada por $y = -32t^2 + 55t + 4$.)
20. Bryson tiene un negocio donde fabrica y vende llantas. Las ganancias por la venta de llantas en el mes de julio están dadas por la función $R = x(200 - 0.4x)$, en donde x es el número de llantas vendidas. ¿Puede el negocio de Bryson generar ganancias de $20,000 en el mes de julio?

Respuestas a los ejercicios de repaso

1. $D = -24$
2. $D = 57$
3. $D = 0$
4. $D = 1$
5. $D = 384$
6. $D = -95$
7. $D = -15$ soluciones no reales
8. $D = 36$ dos soluciones reales
9. $D = 9489$ dos soluciones reales
10. $D = 0$ una solución real

11. $D = -31$ soluciones no reales
12. $D = 256$ dos soluciones reales
13. $D = 96$ dos soluciones reales irracionales
14. $D = 16$ dos soluciones reales racionales
15. $D = 241$ dos soluciones reales irracionales
16. $D = \frac{8}{3}$ dos soluciones reales irracionales
17. $D = 0$ una solución real racional
18. $D = 25$ dos soluciones reales racionales
19. no
20. sí

1.7 Modelos lineales, exponenciales y cuadráticos

Objetivos de aprendizaje

- Identificar funciones usando diferencias y razones.
- Escribir ecuaciones para funciones.
- Desarrollar regresiones exponenciales y cuadráticas con una calculadora graficadora.
- Resolver problemas del mundo real comparando modelos de funciones.

Introducción

En este curso has aprendido sobre tres tipos de funciones: lineales, cuadráticas y exponenciales.

Las funciones lineales tienen la forma $y = mx = b$.

Las funciones cuadráticas tienen la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Las funciones exponenciales tienen la forma $y = a \cdot b^x$.

En aplicaciones del mundo real, la función que describe alguna situación física no es dada. Encontrar la función es una parte importante para resolver problemas. Por ejemplo, datos científicos como observaciones del movimiento planetario regularmente se colectan como un conjunto de medidas dadas en una tabla. Un trabajo para el científico es encontrar cuál función se ajusta más a los datos. Es esta sección aprenderás algunos métodos que son usados para identificar cuál función describe la relación entre las variables independiente y dependiente de un problema.

Identificación de funciones usando diferencias y razones

Un método para identificar funciones es observar la diferencia o la razón de diferentes valores de la variable dependiente.

Usamos diferencia para identificar funciones lineales.

Si la diferencia entre valores de la variable dependiente es la misma cada vez que cambiamos la variable independiente en la misma cantidad, entonces la función es *lineal.*

Ejemplo 1

Determinar si la función representada en la siguiente tabla de valores es lineal.

x	y	diferencia entre valores de y
-2	-4	-1 + 4 = 3
-1	-1	2 + 1 = 3
0	2	5 − 2 = 3
1	5	8 − 5 = 3
2	8	

Si tomamos la diferencia entre valores consecutivos de $y-$, vemos que cada vez el valor de $x-$ se incrementa en uno, el valor de $y-$ siempre se incrementa en 3.

Ya que la diferencia es siempre la misma, **la función es lineal.**

Cuando observamos la diferencia de los valores de $y-$, debemos estar seguros que examinamos cuáles valores de $x-$ incrementan en la misma cantidad.

Por ejemplo, examinar los valores de la siguiente tabla.

diferencia entre valores de x	x	y	diferencia entre valores de y
	0	5	-1 + 4 = 3
1 - 0 = 1	1	10	2 + 1 = 3
3 - 1 = 2	3	20	5 − 2 = 3
4 - 3 = 1	4	25	8 − 5 = 3
6 - 4 = 2	6	35	

A la primera impresión, esta función no parece ser lineal porque la diferencia en los valores de $y-$ no es siempre la misma.

Sin embargo, vemos que la diferencia en el valor de $y-$ es 5 cuando incrementamos el valor de $x-$ en 1, y el valor es 10 cuando incrementamos el valor de $x-$ en 2. Esto significa que la diferencia en los valores de $y-$ es siempre 5 cuando incrementamos los valores de $x-$ en 1. Por consiguiente, la función es lineal. La clave para esta observación es que **la razón de las diferencias es constante**.

En notación matemática podemos escribir la propiedad lineal como sigue.

Si $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ es siempre la misma para valores de las variables dependientes e independientes, entonces los puntos están sobre una línea. Nótese que la expresión que escribimos es la definición de la pendiente de una recta.

Las diferencias también pueden ser usadas para identificar funciones cuadráticas. Para una función cuadrática, cuando incrementamos los valores de $x-$ en la misma cantidad,

La diferencia entre los valores de $y-$ no será la misma. Sin embargo, la diferencia de las diferencias de los valores de $y-$ será la misma.

A continuación se presentan algunos ejemplos de relaciones cuadráticas representadas en tablas de valores.

a)

x	$y = x^2$	diferencia entre valores de y	diferencia entre diferencias
0	0	1 – 0 = 1	
1	1	4 – 1 = 3	3 – 1 = 2
2	4	9 – 4 = 5	5 – 3 = 2
3	9	16 – 9 = 7	7 – 5 = 2
4	16	25 – 16 = 9	9 – 7 = 2
5	25	36 – 25 = 11	11 – 9 = 2
6	36		

En esta función cuadrática, $y = x^2$, cuando incrementamos el valor de $x-$ en uno, el valor de y incrementa en valores diferentes. Sin embargo, el incremento es constante: la diferencia de las diferencias es siempre 2.

b)

x	$y = 2x^2$ 3x + 1	diferencia entre valores de y	diferencia entre diferencias
0	0	0 – 1 = -1	
1	1	3 – 0 = 3	3 + 1 = 4
2	3	10 – 3 = 7	7 – 3 = 4
3	10	21 – 10 = 11	11 – 7 = 4
4	21	36 – 21 = 15	15 – 11 = 4
5	36	55 – 36 = 19	19 – 15 = 4
6	55		

En esta funcion cuadratica, $y = x^2 - 3x + 1$, cuando incrementamos el valor de $x-$ en uno, el valor de y incrementa en diferentes valores. Sin embargo, el incremento es constante: la diferencia de las diferencias es siempre 4.

Usamos razones para identificar funciones exponenciales.

Si la razón entre los valores de la variable dependiente es el mismo cada vez que cambiamos la variable independiente en la misma cantidad, entonces la función es *exponencial.*

Ejemplo 2

Determina si la función representada en la siguiente tabla de valores es exponencial.

a)

x	y	proporción de valores de y
0	4	$\frac{12}{4} = 3$
1	12	$\frac{36}{12} = 3$
2	36	$\frac{108}{36} = 3$
3	108	$\frac{324}{108} = 3$
4	324	

Si tomamos la razón de valores consecutivos de $y-$, vemos que cada vez que el valor de $x-$ incrementa en uno, el valor de $y-$ es multiplicado por 3.

Ya que la razón es siempre la misma, **la función es exponencial.**

b)

x	y	proporción de valores de y
0	240	$\frac{120}{240} = \frac{1}{2}$
1	120	$\frac{60}{120} = \frac{1}{2}$
2	60	$\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$
3	30	$\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$
4	15	

Si tomamos la razón de valores consecutivos de $y-$, vemos que cada vez que el valor de $x-$ se incrementa en uno, el valor de $y-$ es multiplicado por $\frac{1}{2}$.

Ya que la razón es siempre la misma, **la función es exponencial.**

Escribir ecuaciones para funciones

Una vez identificamos cuál es el tipo de función que se ajusta a los valores dados, podemos escribir una ecuación para la función empezando con la forma general para dicho tipo de función.

Ejemplo 3

Determinar qué tipo de función representan los valores en la siguiente tabla.

TABLE 1.16:

x	y
0	3
1	1
2	-3
3	-7
4	-11

Solución

Primero chequeemos la diferencia de valores consecutivos de y.

x	y	diferencia entre valores de y
0	5	1 - 5 = -4
1	1	-3 - 1 = -4
2	-3	-7 + 3 = -4
3	-7	-11 + 7 = -4
4	-11	

Si calculamos la diferencia entre valores consecutivos de $y-$, vemos que cada vez que el valor de $x-$ incrementa en uno, el valor de $y-$ siempre decrece en 4. Ya que la diferencia es siempre la misma, **la función es lineal.**

Para encontrar la ecuación para la función que representan estos valores, empezaremos con la forma general de una función lineal.

$$y = mx + b$$

Aquí "m" es la pendiente de la línea y se define como la cantidad en la cual y incrementa cada vez que el valor de x incrementa en uno. La constante b es el valor de la función cuando $x = 0$. Por consiguiente, la función es

$$y = -4x + 5$$

Ejemplo 4

Determinar qué tipo de función representan los valores en la siguiente tabla.

TABLE 1.17:

x	y
0	0
1	5
2	20
3	45
4	80
5	125
6	180

Solución

Primero chequeemos la diferencia de valores consecutivos de y.

x	y	diferencia entre valores de y
0	0	$5-0 = 5$
1	5	$20-5 = 15$
2	20	$45-20 = 25$
3	45	$80-45 = 35$
4	80	$125-80 = 45$
5	12	$180-125 = 55$
6	18	

Si calculamos la diferencia entre valores consecutivos de $y-$, vemos que cada vez que el valor de $x-$ incrementa en uno, el valor de $y-$ por permanece constante. Como la diferencia no es la misma, **la función no es lineal.**

Ahora chequeemos la diferencia de las diferencias en los valores de y.

x	y	diferencia entre valores de y	diferencia entre diferencias
0	0	$5-0 = 5$	$15-5 = 10$
1	5	$20-5 = 15$	$25-15 = 10$
2	20	$45-20 = 25$	$35-25 = 10$
3	45	$80-45 = 35$	$45-35 = 10$
4	80	$125-80 = 45$	$55-45 = 10$
5	12	$180-125 = 55$	
6	18		

Cuando incrementamos el valor de $x-$ en uno, el valor de y incrementa en diferentes valores. Si embargo, el incremento es constante. La diferencia de las diferencias es siempre 10 cuando incrementamos el valor de $x-$ en uno.

La función descrita por este conjunto de valores es **cuadrática.** Para encontrar la ecuación de la función que representan estos valores, empezamos con la forma general de una función cuadrática.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Necesitamos usar los valores en la tabla para encontrar los valores de las constantes a, b y c.

El valor de c representa el valor de la función cuando $x = 0$, así que $c = 0$.

Entonces	$y = ax^2 + bx$
Sustituir el punto $(1,5)$.	$5 = a + b$
Sustituir el punto $(2,20)$.	$20 = 4a + 2b \Rightarrow 10 = 2a + b$
Para encontrar a y b, resolvemos el sistema de ecuaciones	$5 = a + b$
	$10 = 2a + b$
Resolver la primera ecuaciÃ³n para b.	$5 = a + b \Rightarrow b = 5 - a$
Sustituir la primera ecuaciÃ³n en la segunda.	$10 = 2a + 5 - a$
Resolver para a y b.	$a = 5$ y $b = 0$

Por consiguiente la ecuación de la función cuadrática es

$y = 5x^2$

Ejemplo 5

Determinar qué tipo de función representan los valores en la siguiente tabla.

TABLE 1.18:

x	y
0	400
1	100
2	25
3	625
4	1.5625

Solución:

Chequeemos la razón de valores consecutivos de y.

x	y	proporción de valores de y
0	400	$\frac{100}{400} = \frac{1}{4}$
1	100	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
2	25	$\frac{6.25}{25} = \frac{1}{4}$
3	6.25	$\frac{1.5625}{6.25} = \frac{1}{4}$
4	1.5625	

Si calculamos la razón de los valores consecutivos de $y-$, vemos que cada vez que el valor de $x-$ incrementa en uno, el valor de $y-$ es multiplicado por $\frac{1}{4}$.

Como la razón es siempre la misma, **la función es exponencial.**

Para encontrar la ecuación de la función que representan estos valores, empezamos con la forma general de una función exponencial.

$$y = a \cdot b^x$$

b es la razón entre los valores de y cada vez que x se incrementa en uno. La constante a es el valor de la función cuando $x = 0$. Por consiguiente nuestra respuesta es

$$y = 400\left(\frac{1}{4}\right)^x$$

Regresión exponencial y cuadrática usando una calculadora graficadora

Temprano aprendiste a hacer regresión lineal con una calculadora graficadora para encontrar la ecuación de una línea recta que se ajuste a un conjunto de datos lineales. En esta sección, aprenderás a hacer regresión exponencial y cuadrática para encontrar ecuaciones para funciones que describen relaciones no lineales entre las variables de un problema.

Ejemplo 6

Encontrar la función cuadrática que mejor se ajuste a los datos que se presentan en la siguiente tabla. La siguiente tabla muestra cuántas millas por galón un carro recorre con diferentes velocidades.

TABLE 1.19:

Velocidad (mill/h)	Millas por galón
30	18
35	20
40	23
45	25
50	28
55	30
60	29
65	25
70	25

Usando una calculadora graficadora.

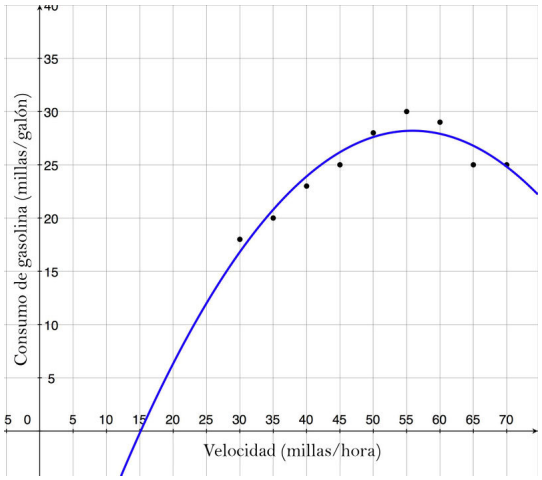
a) Dibujar un diagrama de dispersión de los datos.

b) Encontrar la función cuadrática que mejor se ajuste.

c) Dibujar la función cuadrática que mejor se ajuste en el diagrama de dispersión.

d) Encontrar la velocidad que maximice la millas por galón.

e) Predecir la millas por galón del carro si se viaja a una velocidad de 48 millas por hora.



Solución

Paso 1 Introducir los datos

Presionar **[STAT]** y escoger la opción **[EDIT]**.

Introducir los valores de x en la primera columna (L_1) y los valores de y en la segunda columna (L_2).

Nota: Para poder limpiar una lista, mover el cursor a la parte de arriba para que L_1 o L_2 estén sombreadas. Luego presionar el botón **[CLEAR]** y luego **[ENTER]**.

Paso 2 Dibujar el diagrama de dispersión.

Primero presionar **[Y=]** y borrar cualquier función que aparezca en la pantalla presionando **[CLEAR]** cuando la función antigua está sombreada.

Presionar **[STATPLOT]** **[STAT]** y **[Y=]** y escoger la opción 1.

Escoger la opción ON, después TYPE, escoger el primer tipo de gráfica (scatterplot) y estar seguro que los nombres Xlist y Ylist coinciden con los nombres de la parte de arriba de las columnas en la tabla introducida.

Presionar **[GRAPH]** y estar seguro que la ventana esta de tal forma que puedas ver todos los puntos en el diagrama de dispersión. En este caso $30 \leq x \leq 80$ y $0 \leq y \leq 40$.

Puedes cambiar el tamaño de la ventana presionando la tecla **[WINDOW]** que se encuentra arriba.

Paso 3 Hacer regresión cuadrática.

Presionar **[STAT]** y usar la flecha derecha para escoger **[CALC]**.

Seleccionar la opción 5 (QuadReg) y presionar **[ENTER]**. Veras "QuadReg" en la ventana.

Digitar L_1, L_2 después de 'QuadReg' y presionar **[ENTER]**. La calculadora muestra la función cuadrática.

Función $y = -0.017x^2 + 1.9x - 25$

Paso 4: Graficar la función.

Presionar **[Y=]** e introducir la función que acabas de encontrar.

Presionar **[GRAPH]** y verás la curva ajustada dibujada sobre los puntos de los datos.

Para encontrar la velocidad que maximiza las millas por galón, usar **[TRACE]** y mover el cursor a la parte más alta de la parábola. También puedes usar **[CALC]** **[2nd]** **[TRACE]** y la opción 4 Maximum, para una respuesta más precisa. La velocidad que maximiza la millas por galón es = 56 millas hora

Sustituir $x = 56$ en la ecuación que encontraste: $y = -0.017(56)^2 = 1.9(56) - 25 = 28$ millas por galÃ^{3}n

Nota: la imagen a la derecha muestra los puntos de los datos de la tabla y la función dibujada en la misma gráfica.

Una cosa que está clara en esta gráfica es que la predicción hecha con esta función no tendría sentido para todos los valores de x. Por ejemplo, si $x < 15$, esta gráfica predice que obtendríamos un millaje negativo, algo que es imposible. Entonces, parte de las habilidades de usar regresión en tu calculadora es conocer las ventajas y limitaciones de este método para ajustar funciones a partir de datos.

Ejemplo 7

Los siguientes datos representan la cantidad de dinero que un inversionista tiene en una cuenta cada año por 10 años.

TABLE 1.20:

año	**valor en la cuenta**
1996	$5000
1997	$5400
1998	$5800
1999	$6300
2000	$6800
2001	$7300
2002	$7900
2003	$8600
2004	$9300
2005	$10000
2006	$11000

Usando una calculadora graficadora:

a) Dibujar un diagrama de dispersión del valor de la cuenta con una variable dependiente, y el número de años *desde* 1996 como variable independiente.

b) Encontrar la función exponencial que se ajusta a los datos.

c) Dibujar la función exponencial sobre el diagrama de dispersión.

d) ¿Cuál será el valor de cuenta en 2020?

Solución

Paso 1 Introducir los datos

Presionar **[STAT]** y escoger la opción **[EDIT]**.

Introducir los valores de x en la primera columna (L_1) y los valores de y en la segunda columna (L_2).

Paso 2 Dibujar el diagrama de dispersión.

Primero, presionar **[Y=]** y borrar cualquier función que aparezca en la pantalla.

Presionar **[GRAPH]** y seleccionar la opción 1.

Seleccionar la opcion ON y asegurarse que los nombres Xlist y Ylist coinciden con los nombres en la parte de arriba de las columnas en la tabla de datos.

Presionar **[GRAPH]** y asegurarse que la ventana se encuentra de tal forma que puedes ver todos los puntos en el diagrama de dispersión. En este caso: $0 \leq x \leq 10$ y $0 \leq y \leq 11000$.

Paso 3 Hacer regresión exponencial.

Presionar **[STAT]** y usar la flecha derecha para escoger **[CALC]**.

Escoger opción 0 y presionar **[ENTER]**. Verás "ExpReg" en la pantalla.

Presionar **[ENTER]**. La calculadora muestra la función exponencial.

Función $y = 4975.7(1.08)^x$

Paso 4: Graficar la función.

Presionar **[Y=]** e introducir la función que acabas de encontrar. Presionar **[GRAPH]**.

Sustituir $x = 2020 - 1996 = 24$ en la función $y = 4975.7(1.08)^{24} = \$31551.81$.

Nota: Es un ajuste de curva. Así que la función de arriba es la que mejor se ajusta a todos los puntos de los datos. Esta no generará valores de y que sean exactamente igual a los datos en la tabla, pero estarán los suficientemente cercanos. Es más exacto usar los valores de la curva ajustada que los puntos de los datos.

Solución de problemas del mundo real comparando modelos de funciones

Ejemplo 8

La siguiente tabla muestra el número de estudiantes inscritos en las escuelas primarias públicas en los Estados Unidos (fuente: Oficina de Censos de los Estados Unidos). Construir un diagrama de dispersión con el número de estudiantes como variable dependiente y el número de años desde 1990 como la variable independiente. Encuentra cuál es la curva que mejor se ajusta a estos datos y predice la inscripción escolar en 2007.

TABLE 1.21:

Año	Número de estudiantes (millones)
1990	26.6
1991	26.6
1992	27.1
1993	27.7
1994	28.1
1995	28.4
1996	28.1
1997	29.1
1998	29.3
2003	32.5

Solución

Haremos regresión lineal, cuadrática y exponencial con este conjunto de datos y veremos cuál función representa mejor los valores en la tabla.

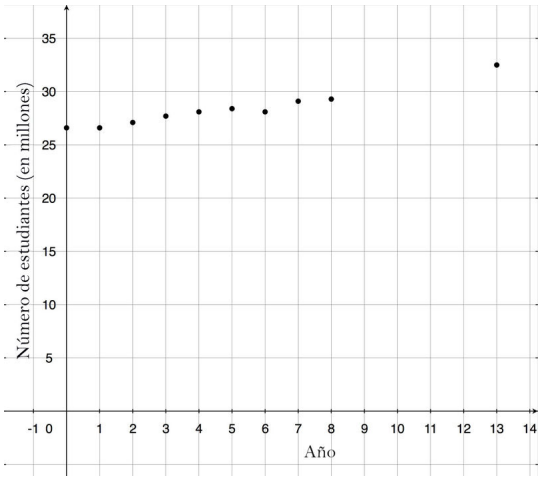
Paso 1 Introducir los datos.

Introducir los valores de x en la primera columna (L_1) y los valores de y en la segunda columna (L_2).

Caso 2 Dibujar el diagrama de dispersión.

Configurar el tamaño de la pantalla: $0 \leq x \leq 10$ y $20 \leq y \leq 40$.

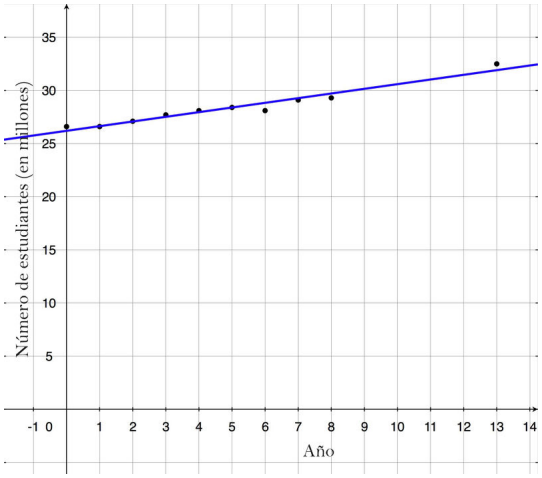
A continuación se presenta el diagrama de dispersión.



Paso 3 Hacer regresión.

Regresión lineal

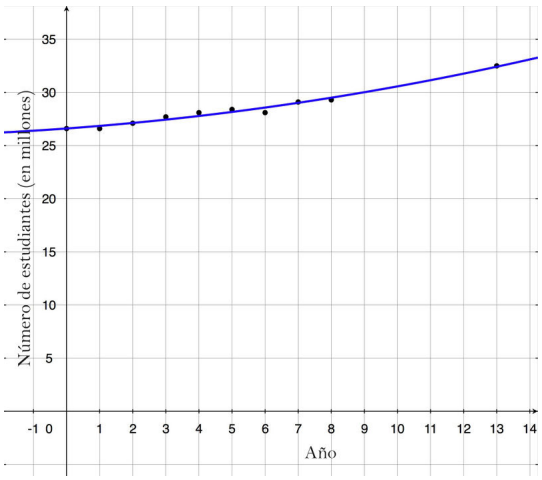
La función de la línea que mejor se ajusta es $y = 0.44x + 26.1$.



A continuación se muestra la gráfica de la función sobre el diagrama de dispersión.

Regresión cuadrática

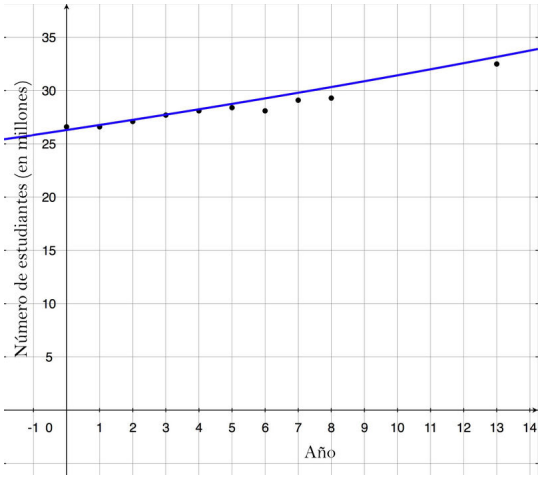
La función cuadrática que mejor se ajusta es $y = 0.064x^2 - .067x + 26.84$.



A continuación se presenta la gráfica de la función sobre el diagrama de dispersión.

Regresión exponencial

La función exponencial que mejor se ajusta es $y = 26.2(1.018)^x$.



A continuación se presenta la gráfica de la función sobre el diagrama de dispersión.

Al observar las gráficas, parece que la función cuadrática es la que mejor se ajusta a este conjunto de datos. Usamos esta función para predecir el número de alumnos inscritos en 2007.

Sustituir $x = 2007 - 1990 = 17$

$$y = 0.064(17)^2 - .067(17) + 26.84 = \underline{44.2 \text{ millones de estudiantes}}$$

Ejercicios de repaso

Determinar si los datos en las siguientes tablas pueden se representados por una función lineal.

TABLE 1.22:

x	y
-4	10
-3	7
-2	4
-1	1
0	-2
1	-5

TABLE 1.23:

x	y
-2	4
-1	3
0	2
1	3

TABLE 1.23: (continued)

x	y
2	6
3	11

TABLE 1.24:

x	y
0	50
1	75
2	100
3	125
4	150
5	175

Determinar si los datos en las siguientes tablas pueden ser representados por una función cuadrática.

TABLE 1.25:

x	y
-10	10
-5	2.5
0	0
5	2.5
10	10
15	22.5

TABLE 1.26:

x	y
1	4
2	6
3	6
4	4
5	0
6	-6

TABLE 1.27:

x	y
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

Determinar si los datos en las siguientes tablas pueden ser representados por una función exponencial.

TABLE 1.28:

x	y
0	200
1	300
2	1800
3	8300
4	25800
5	62700

TABLE 1.29:

x	y
0	120
1	180
2	270
3	405
4	607.5
5	911.25

TABLE 1.30:

x	y
0	4000
1	2400
2	1440
3	864
4	518.4
5	311.04

Determinar qué tipo de función representan los valores en la siguiente tabla y encontrar la ecuación de la función.

TABLE 1.31:

x	y
0	400
1	500
2	625
3	781.25
4	976.5625

TABLE 1.32:

x	y
-9	-3
-7	-2
-5	-1
-3	0
-1	1
1	2

TABLE 1.33:

x	y
-3	14
-2	4
-1	-2
0	-4
1	-2
2	4
3	14

13. Una pelota que está rebotando de arriba hacia abajo, la altura máxima a la que la pelota llega decrece continuamente de un rebote a otro. Para un rebote determinado, la tabla muestra la altura de la pelota con respecto al tiempo.

TABLE 1.34:

Tiempo (segundos)	**Altura (pulgadas)**
2	2
2.2	16
2.4	24
2.6	33
2.8	38
3.0	42
3.2	36
3.4	30
3.6	28
3.8	14
4.0	6

Usando una calculadora graficadora:

(a) Dibujar el diagrama de dispersión de los datos.

(b) Encontrar la función cuadrática que mejor se ajuste.

(c) Dibujar la función que mejor se ajusta sobre el diagrama de dispersión.

(d) Encontrar la máxima altura que la pelota alcanza en el rebote.

(e) Predecir la altura de la pelota par el tiempo $t = 2.5$ *segundos*.

14. Una química tiene una muestra de 250 gramos de un material radiactivo. Toma nota de la cantidad de material radiactivo restante en la muestra cada día durante una semana y obtiene los datos que se muestran en la siguiente tabla.

TABLE 1.35:

Día	**Peso (gramos)**
0	250
1	208
2	158
3	130

TABLE 1.35: (continued)

Día	Peso (gramos)
4	102
5	80
6	65
7	50

Usando una calculadora graficadora:

(a) Dibujar el diagrama de dispersión de los datos.

(b) Encontrar la función exponencial que mejor se ajuste.

(c) Dibujar la función exponencial que mejor se ajuste sobre el diagrama de dispersión.

(d) Predecir la cantidad de materia después de 10 días.

15. La siguiente tabla muestra la razón de preñez (por 1000) de mujeres Norteamericanas entre las edades de 15 a 19 años (fuente:Oficina de Censos de los Estados Unidos). Hacer un diagrama de dispersión con la razón de preñez como variable dependiente y el número de años desde 1990 como variable independiente. Encontrar cuál es la mejor curva que se ajusta a estos datos y predecir la razón de embarazos adolescentes en 2010.

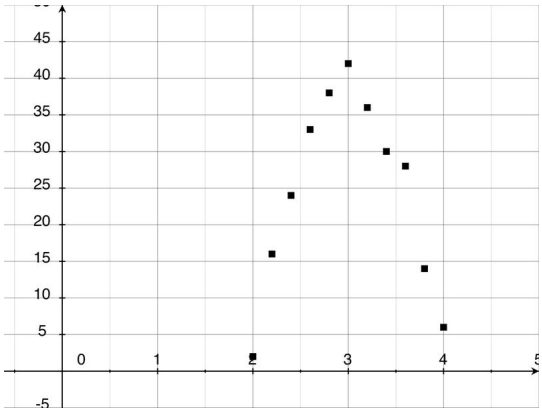
TABLE 1.36:

Año	Razón de preñez (por 1000)
1990	116.9
1991	115.3
1992	111.0
1993	108.0
1994	104.6
1995	99.6
1996	95.6
1997	91.4
1998	88.7
1999	85.7
2000	83.6
2001	79.5
2002	75.4

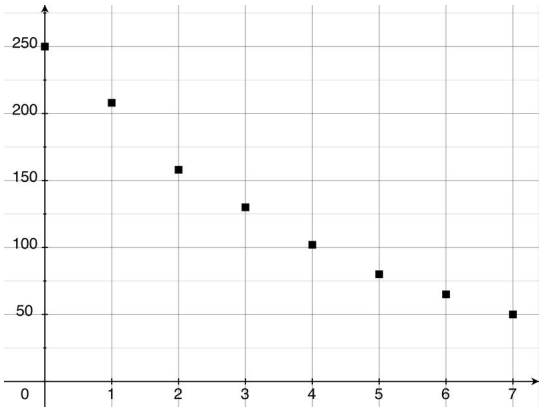
Ejercicios de repaso

1. Diferencia lineal común = -3
2. No es lineal
3. Diferencia lineal común = 25
4. Diferencia cuadrática de las diferencias = 5
5. Diferencia cuadrática de las diferencias = -2
6. No es cuadrática
7. No es exponencial
8. Razón común exponencial = 1.5
9. Razón común exponencial = 0.6

10. Exponencial $y = 400(1.25)^x$
11. Lineal $y = \left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}\right)$
12. Cuadrática $y = 2x^2 - 4$

1. 

2. $y = -35.4x^2 + 213.3x - 282.4$;
3. MÃ¡xima altura $= 38.9$ *pulgadas*.
4. $t = 2.5$ *segundos*, altura $= 29.6$ *pulgadas*.

1. 

2. $y = 255.25(0.79)^x$
3. Después de 10 días, hay 24.17 gramos de material.

13. función lineal que mejor se ajusta: $y = -3.54x + 117.8$ En el año 2010, $x = 20$, razón de embarazos adolescentes $= 47$ por 1000

1.8 Estrategias para resolver problemas: escoger un modelo de función

Objetivos de aprendizaje

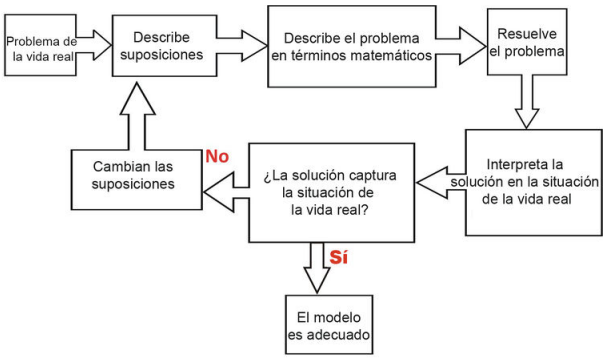
- Leer y comprender la situaciones de problemas dados.
- Desarrollar y usar la estrategia: escoger una función.
- Desarrollar y usar la estrategia: hacer un modelo.
- Planificar y comparar diferentes alternativas para resolver problemas.
- Resolver problemas del mundo real usando estrategias seleccionadas como parte de un plan.

Introducción

A medida aprendas más y más métodos matemáticos y técnicas matemáticas, es importante pensar sobre el propósito de la matemática y cómo esta trabaja como parte de una figura más grande. Matemática se usa para resolver problemas en los cuales a menudo aparecen situaciones del mundo real; **construir un modelo matemático** es un proceso en el cual empezamos con una situación de la vida real y llegamos a una solución cuantitativa. Construir modelos requiere de la creación de un conjunto de ecuaciones matemáticas que describen una situación, resolver estas ecuaciones y usarlas para comprender el problema de la vida real. Regularmente el modelo necesita ser ajustado porque este no describe la situación también como lo desearíamos.

Un modelo matemático puede ser usado para adquirir entendimiento de un situación de la vida real aprendiendo cómo funciona el sistema, cuáles son las variables importantes en el sistema y cómo éstas están relacionadas la una con la otra. Los modelos también pueden ser usados para predecir y estimar qué hará un sistema en el futuro para diferentes valores de un parámetro. Por último, un modelo puede ser usado para estimar cantidades que son difíciles de evaluar de forma exacta.

Los modelos matemáticos son similares a otros tipos de modelos. El objetivo no es producir una copia exacta de un objeto "real", sino dar una representación de algunos aspectos del objeto real. El proceso de construir modelos puede resumirse como sigue:



Nota que el proceso de construir modelos es muy similar al formato de solución de problemas que hemos usado a través de este libro. En esta sección, nos enfocaremos mayormente en las suposiciones que hacemos y la validación

del modelo. Las funciones son una parte integral del proceso de construir modelos porque son usadas para describir las relaciones matemáticas en un sistema. Una de las partes más difíciles del proceso de construir modelos es determinar cuál es la función que mejor describe una situación. Regularmente encontraremos que la función que escogemos no es la apropiada. Entonces, debemos seleccionar una función diferente o encontramos que una función modelo es buena para un conjunto de parámetros pero necesitamos usar otra función para un conjunto diferente de parámetros. Seguido, para ciertos parámetros, más de una función describe bien la situación y usar la más simple es lo más práctico.

A continuación se presentan algunos modelos matemáticos provenientes de aplicaciones del mundo real.

Ejemplo 1 Estiramiento de resortes más allá del "límite elástico"

Un resorte se estira a medida que se le pone más peso en la parte de abajo. La siguiente tabla muestra la longitud del resorte en pulgadas para diferentes pesos en onzas.

Peso (onzas)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Longitud (pulgadas)	2	2.4	2.8	3.2	3.5	3.9	4.1	4.4	4.6	4.7	4.8

a) Encontrar la longitud del resorte como una función del peso que soporta.

b) Encontrar la longitud del resorte cuando se le pone un peso d 5 onzas.

c) Encontrar la longitud del resorte cuando se le pone un peso de 19 onzas.

Solución

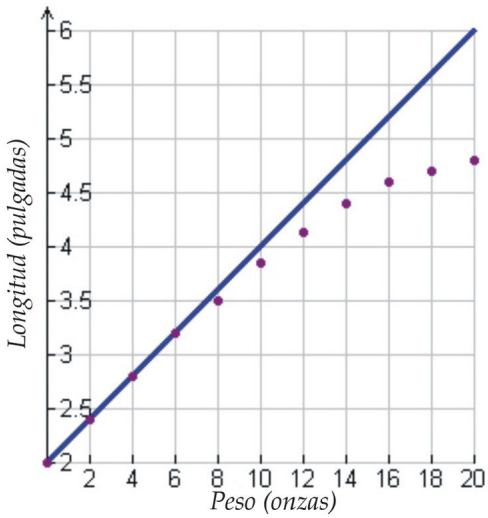
Paso 1 Comprender el problema

Definir $x =$ peso en onzas en el resorte

$y =$ longitud en pulgadas del resorte

Paso 2 Trazar un plan

Los resortes usualmente tienen una relación lineal entre el peso sobre ellos y la longitud de su estiramiento. Si construimos un diagrama de dispersión, notamos que para pesos livianos los puntos parecen ajustarse a una línea recta (ver la gráfica). Asumir que la función que relaciona la longitud del resorte y el peso es lineal.



Paso 3 Resolver

Encontrar la ecuación de la línea usando puntos que describan los pesos livianos:

(0, 2) y (4, 2.8).

La pendiente es: $m = \frac{.8}{4} = 0.2$

Usando $y = mx + b$

a) Obtenemos la función $y = .2x + 2$.

b) Para encontrar la longitud del resorte cuando el peso es 5 onzas, sustituir $x = 5$.

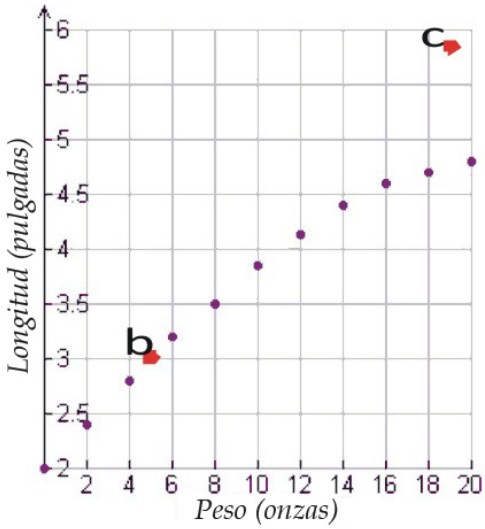
$$y = .2(5) + 2 = 3 \text{ pulgadas}$$

c) Para encontrar la longitud del resorte cuando el peso es 19 onzas, sustituimos $x = 19$.

$$y = .2(19) + 2 = 5.8 \text{ pulgadas}$$

Paso 4 Chequear

Para chequear la validez de las soluciones grafiquemos las respuestas de b) y c) sobre el diagrama de dispersión. Vemos que la respuesta en b) es cercana al resto de los datos, pero la respuesta en c) no parece seguir un buen ajuste.



Podemos concluir que para pesos pequeños, la relacion entre la longitud del resorte y el peso es una función lineal.

Para pesos grandes, el resorte no parece estirarse tanto cada vez que se le añade una onza. Debemos cambiar nuestra suposición. Debe haber una relación no lineal entre la longitud y el peso.

Paso 5 Resolver con la nueva suposición

Encontremos la ecuación de la función usando regresión cúbica con una calculadora graficadora.

a) Obtenemos la función $y = -.000145x^3 - .000221x^2 + .202x + 2.002$.

b) Para encontrar la longitud del resorte cuando el peso es 5 onzas, sustituimos $x = 5$.

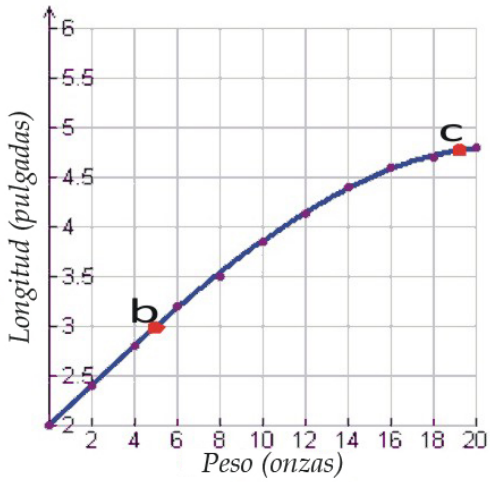
$$y = -.000145(5)^3 - .000221(5)^2 + .202(5) + 2.002 = 3 \text{ pulgadas}$$

c) Para encontrar la longitud del resorte cuando el peso es 19 onzas, sustituimos $x = 19$.

$$y = -.000145(19)^3 - .000221(19)^2 + .202(19) + 2.002 = 4.77 \text{ pulgadas}$$

Paso 6 Chequear

Para chequear la validez de las soluciones graficamos las respuestas de b) y c) sobre el diagrama de dispersión. Vemos que la respuesta a ambas b) y c) son cercanas al resto de los datos.



Concluimos que una función cúbica representa el estiramiento del resorte más exactamente que una función lineal. Sin embargo, para pesos livianos la función lineal es también una buena representación, y es mucho más fácil de usar en la mayoría de los casos. En realidad, la aproximación lineal usualmente nos permite resolver de forma fácil muchos problemas que serían muy difíciles de resolver usando una función cúbica.

Ejemplo 2 Corriente de agua

Un cilindro delgado se llena con agua hasta la altura de 50 centímetros. El cilindro tiene un hoyo en la parte de abajo el cual se sella con un tapón. El tapón se quita cuando el tiempo es $t = 0$ segundos y se deja vaciar. Los siguientes datos muestran la altura del agua en el cilindro a diferentes tiempos.

Tiempo (segundos)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Altura (cm)	50	42.5	35.7	29.5	23.8	18.8	14.3	10.5	7.2	4.6	2.5	1.1	0.2

a) Encontrar la altura (en centímetros) del agua en el cilindro como una función del tiempo en segundos.

b) Encontrar la altura del agua cuando $t = 5$ *segundos*.

c) Encontrar la altura del agua cuando $t = 13$ *segundos*.

Solución:

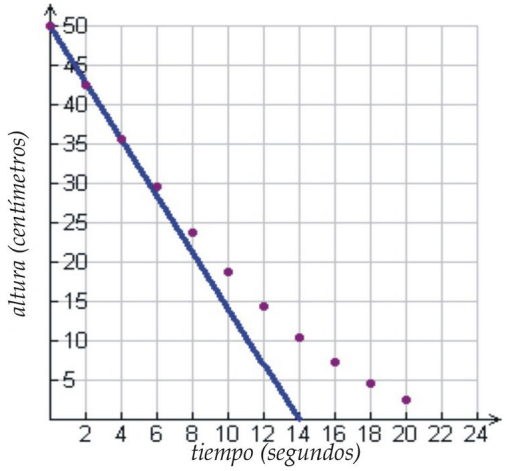
Paso 1 Comprender el problema

Definir $x =$ el tiempo en segundos

$y =$ altura del agua en centímetros

Paso 2 Trazar un plan

Construyamos un diagrama de dispersión de nuestros datos con el tiempo en el eje horizontal y la altura del agua en el eje vertical.



Notar que la mayoría de los puntos parecen ajustarse a una línea recta cuando el nivel del agua es alto. Asumir que una función que relaciona la altura del agua con el tiempo es lineal.

Paso 3 Resolver

Encontrar la ecuación de la línea usando puntos que describan niveles altos:

(0, 50) y (4, 35.7).

La pendiente es $m = \frac{-14.3}{4} = -3.58$

Usando $y = mx + b$

a) Obtenemos la función: $y = -3.58x + 50$

b) La altura del agua cuando $t = 5$ *segundos* es

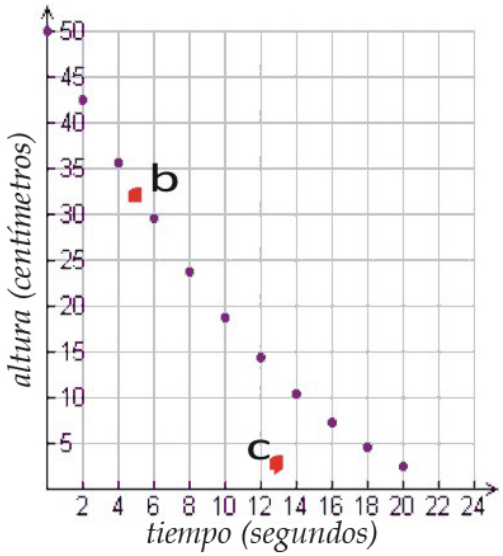
$$y = -3.58(5) + 50 = 32.1 \text{ centÃmetros}$$

c) La altura del agua cuando $t = 13$ *segundos* es

$$y = -3.58(13) + 50 = 3.46 \text{ centÃmetros}$$

Paso 4 Chequear

Para chequear la validez de las soluciones, grafiquemos las respuestas a b) y c) sobre el diagrama de dispersión. Vemos que la respuesta para b) es cercana al resto de los datos, pero la respuesta para c) no parece seguir un buen ajuste.



Podemos concluir que cuando el nivel del agua es alto, la relación entre la altura del agua y el tiempo es una función lineal. Cuando el nivel del agua es bajo, debemos cambiar nuestra suposición. Debe haber una relación no lineal entre la altura y el tiempo.

Paso 5 Resolver con nuevas suposiciones

Asumamos que la relación es cuadrática y encontremos la ecuación de la función usando regresión cuadrática con una calculadora graficadora.

a) Obtenemos la función $y = .075x^2 - 3.87x + 50$

b) La altura del agua cuando $t = 5$ *segundos* es

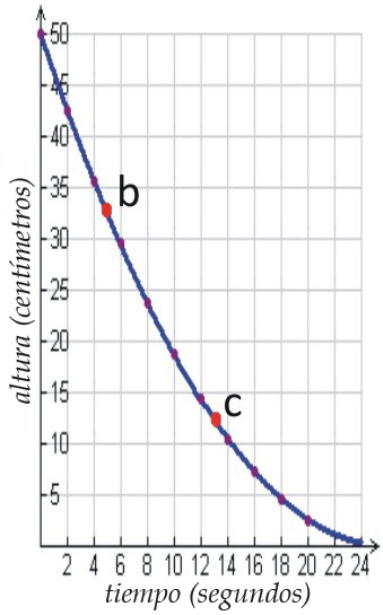
$$y = .075(5)^2 - 3.87(5) + 50 = 32.53 \ centmetros$$

c) La altura del agua cuando $t = 13$ *segundos* es

$$y = .075(13)^2 - 3.87(13) + 50 = 12.37 \ centmetros$$

Paso 6 Chequear

Para chequear la validez de las soluciones grafiquemos las respuestas en b) y c) sobre el diagrama de dispersión. Vemos que ambas respuestas en b) y c) se acercan al resto de los datos.



Concluimos que una función cuadrática representa la situación de forma más exacta que una función lineal. Sin embargo, para niveles altos de agua la función lineal es igualmente una buena representación.

Ejemplo 3 Movimiento de un proyectil

Una pelota de golf es golpeada directamente hacia la calle. La siguiente tabla muestra la altura de la pelota con respecto al tiempo. La pelota es golpeada con un ángulo de 70 grados respecto a la horizontal con una velocidad de 40 metros/segundo.

Tiempo (segundos)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
Altura (metros)	0	17.2	31.5	42.9	51.6	57.7	61.2	62.3	61.0	57.2	51.0	42.6	31.9	19.0	4.1

a) Encontrar la altura de la pelota como una función del tiempo.

b) Encontrar la altura de la pelota cuando $t = 2.4$ *segundos*.

c) Encontrar la altura de la pelota cuando $t = 6.2$ *segundos*.

Solución

Paso 1 Comprender el problema

Definir $x =$ el tiempo en segundos

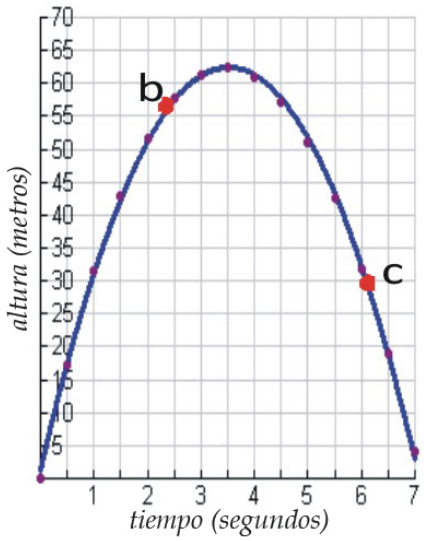
$y =$ altura de la pelota en metros

Paso 2 Trazar un plan

Construyamos un diagrama de dispersión para nuestros datos con el tiempo sobre el eje horizontal y la altura de la pelota sobre el eje vertical. Sabemos que un proyectil sigue una trayectoria parabólica, así que asumiremos que la función que relaciona la altura y el tiempo es cuadrática.

Paso 3 Resolver

Encontremos la ecuación de la función usando regresión cuadrática con una calculadora graficadora.



a) Obtenemos la función $y = -4.92x^2 + 34.7x + 1.2$

b) Encontrar la altura de la pelota cuando $t = 2.4$ *segundos* es

$$y = -4.92(2.4)^2 + 34.7(2.4) + 1.2 = 56.1 \text{ } metros$$

c) Encontrar la altura de la pelota cuando $t = 6.2$ *segundos* es

$$y = -4.92(6.2)^2 + 34.7(6.2) + 1.2 = 27.2 \text{ } metros$$

Paso 4 Chequear

Para chequear la validez de las soluciones grafiquemos las respuestas para b) y c) sobre el diagrama de dispersión. Vemos que ambas respuestas b) y c) se ajustan muy cercanamente. La función cuadrática es un modelo muy bueno para este problema.

Ejemplo 4 Crecimiento poblacional

Un científico cuenta dos mil peces en un lago. La población de peces incrementa a una razón de 1.5 peces por generación, pero el lago tiene espacio y comida para 2,000,000 de peces. La siguiente tabla da el número de peces (en miles) en cada generación.

GeneraciÃ³n	0	4	8	12	16	20	24	28
NÃºmero (miles)	2	15	75	343	1139	1864	1990	1999

a) Encontrar el número de peces como una función de la generación.

b) Encontrar el número de peces en la generación 10.

c) Encontrar el número de peces en la generación 25.

Solución

Paso 1 Comprender el problema

Definir $x =$ el número de generación $y =$ el número de peces en el lago

Paso 2 Trazar un plan

Construyamos un diagrama de dispersión con nuestros datos con el número de generación en el eje horizontal y el número de peces en el eje vertical. Sabemos que una población puede incrementar exponencialmente. Así que asumiremos que podemos usar una función exponencial para describir la relación entre el número de generación y el número de pescados.

Paso 3 Resolver

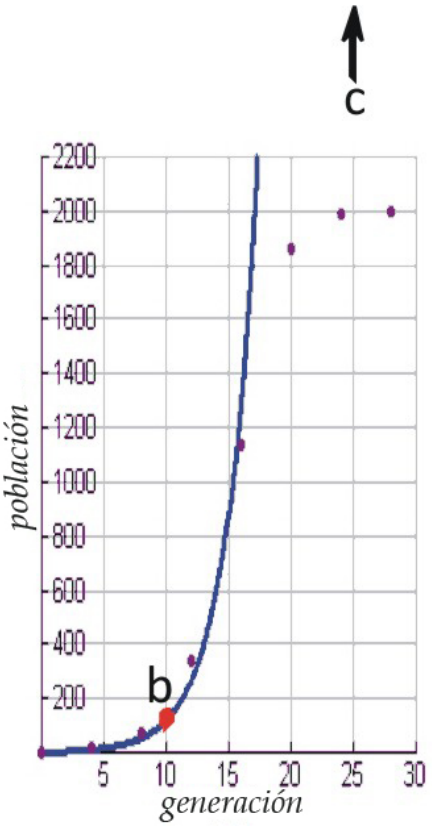
a) Ya que la población incrementa a razón de 1.5 por generación, asumir la función $y = 2(1.5)x$

b) El número de peces en la generación 10 es $y = 2(1.5)^{10} = 115$ mil peces.

c) El número de peces en la generación 25 es $y = 2(1.5)^{25} = 50502$ mil peces.

Paso 4 Chequear

Para chequear la validez de las soluciones grafiquemos la respuestas para b) y c) sobre el diagrama de dispersión. Vemos que la respuesta para b) se ajusta bien a los datos, pero la respuesta para c) no parece ajustarse muy cercanamente. El resultado ni siquiera está en nuestra gráfica.



Cuando la población de eces es grande, los peces compiten por espacio y recursos por lo que no incrementan tan rápido. Debemos cambiar nuestras suposiciones.

Paso 5 Resolver con nuevas suposiciones

Cuando intentamos diferentes regresiones con la calculadora graficadora, encontramos que la regresión logística es la que mejor se ajusta a nuestros datos.

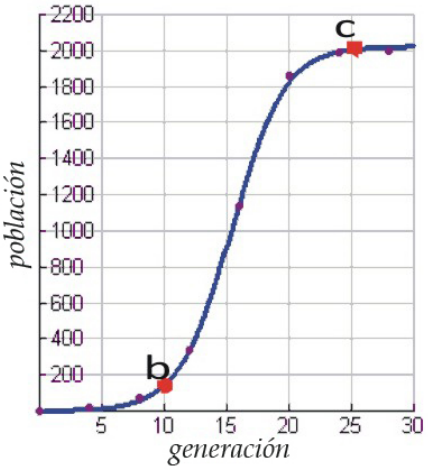
a) Obtenemos la función $y - \frac{2023.6}{1+1706.3(2.71)^{-484x}}$

b) El número de peces en la generación 10 es $y = \frac{2023.6}{1+1706.3(2.71)^{-.484(10)}} = 139.6$ miles de peces.

c) El número de peces en la generación 25 es $y = \frac{2023.6}{1+1706.3(2.71)^{-.484(25)}} = 2005$ miles de peces.

Paso 6 Chequear

Para chequear la validez de las soluciones, grafiquemos la respuestas para b) y c) sobre el diagrama de dispersión. Vemos que ambas respuestas b) y c) están cercanas al resto de los datos.



Concluimos que la función logística representa la situación con más exactitud que la función exponencial. Sin embargo, para poblaciones pequeñas la función exponencial es igualmente una buena representación y es mucho más fácil de usar en muchos casos.

Ejercicios de repaso

1. En el ejemplo 1, evaluar la longitud del resorte para un peso de $= 3$ *onzas* usando
   a. la función lineal
   b. la función cúbica
   c. determinar cuál función es la mejor que se puede usar en esta situación.
2. En el ejemplo 1, evaluar la longitud del resorte para un peso de $= 15$ *onzas* usando
   a. la función lineal
   b. la función cúbica
   c. determinar cuál función es la mejor que se puede usar en esta situación.
3. En el ejemplo 2, evaluar la altura del agua en el cilindro cuando $t = 4.2$ segundos usando
   a. la función lineal
   b. la función cuadrática
   c. determinar cuál función es la mejor que se puede usar en esta situación.
4. En el ejemplo 2, evaluar la altura del agua en el cilindro cuando $t = 19$ segundos usando
   a. la función lineal
   b. la función cuadrática
   c. determinar cuál función es la mejor que se puede usar en esta situación.

5. En el ejemplo 3, evaluar la altura de la pelota cuando $t = 5.2$ segundos. Encontrar cuando la pelota está en su punto más alto.
6. En el ejemplo 4, evaluar el número de peces en la generación 8 usando
    a. la función exponencial
    b. la función logística
    c. determinar cuál función es la mejor que se puede usar en esta situación.
7. En el ejemplo 4, evaluar el número de peces en la generación 18 usando
    a. la función exponencial
    b. la función logística
    c. determinar cuál función es la mejor que se puede usar en esta situación.

Respuestas a los ejercicios de repaso

1. 2.6 pulgadas
2. 2.6 pulgadas
3. Ambas funciones dan el mismo resultado. La función lineal es la mejor porque es más fácil de usar.

1. 5 pulgadas
2. 4.5 pulgadas
3. Las dos funciones dan respuestas diferentes. La función cúbica es mejor porque da una respuesta más precisa.

1. 34.96 cm
2. 35.07 cm
3. Los resultados de ambas funciones son casi los mismos. La función lineal es la mejor porque es más fácil de usar.

1. -18.02 cm
2. 3.5 cm
3. Las dos funciones dan resultados diferentes. La función cuadrática es mejor porque da una respuesta más precisa.

1. 48.6 metros
2. 3.7 segundos

1. 51,000
2. 55,000
3. Los resultados de ambas funciones son casi los mismos. La función lineal es mejor porque es más fácil de usar.

1. 2,956,000
2. 1,571,000
3. Las dos funciones dan resultados diferentes. La función logística en mejor porque da una respuesta más precisa.